TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: L'operador maximal de Hardy-Littlewood.

Autor: Doste Poy, David.

Director: Boza Rocho, Santiago.

Departament: Departament de Matemàtiques (749)

Convocatòria: 2017 - 2018

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Treball Final de Grau

L'operador maximal de Hardy-Littlewood

David Doste Poy

dirigit per
Santiago Boza Rocho

4 de setembre de 2018

Agraïments

Vull agrair a tota la meva família, pel seu suport, als meus amics i companys, per tots els ànims que m'han donat tots aquests anys, al meu tutor per totes les hores que ha dedicat amb mi en aquest treball, i a tota la gent que sempre ha estat ahí quan els necesitava.

En especial, vull agrair a la meva mare per animar-me a que estudiés el que més m'agrada, per donar-me forces en els pitjors moments, ajudar-me quan més ho necessitava i per creure sempre en mi.

Resum

En aquest treball donarem una introducció a la Teoria de la Diferenciació. Aquesta disciplina té el seu origen en el Teorema fonamental del Càlcul i engloba les seves generalitzacions a altres espais, com per exemple el Teorema de Diferenciació de Lebesgue, que va enunciar Lebesgue l'any 1910.

Per demostrar i obtenir generalitzacions adequades d'aquest teorema, s'utilitzen els operadors maximals, dels quals el més important és el de Hardy-Littlewood, associat a boles euclidianes a l'espai, el qual utilitzarem com a eina per entendre millor els resultats i propietats que anirem obtenint al treball. Per altra banda, les propietats més importants d'aquests operadors depenen dels tipus de recobriments que tinguin associats i de les seves característiques geomètriques.

En aquest treball parlarem dels 3 conceptes i de les seves connexions i obtindrem resultats avançats d'anàlisi utilitzant eines purament geomètriques.

Paraules Clau: Espais L^p, Diferenciació d'integrals, teoremes de recobriments, operadors maximals, operador maximal de Hardy-Littlewood, Teorema de Lebesgue, aproximacions de la identitat, base de densitat.

Índex

Introducció

El Teorema Fonamental del Càlcul és ben conegut dins del món de les matemàtiques i forma el pilar bàsic sobre el qual es construeix la Teoria de la Diferenciació d'Integrals. Aquest teorema es pot formalitzar de la següent manera:

Teorema (Teorema Fonamental del Càlcul):
Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua i sigui $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Aleshores:

$$F \in C^1([a, b]) \text{ i } F'(x) = f(x) \text{ per tot } x \in (a, b)$$

Prova. Per demostrar-ho, fixem un valor $c \in (a, b)$. Sigui $h > 0$, tenim:

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} |f(t) - f(c)| dt$$

Com f és contínua a c, tenim que per tot $\epsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que si $|t - c| < \delta$, aleshores $|f(t) - f(c)| < \epsilon$. Així:

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| < \frac{1}{h} \int_c^{c+h} \epsilon \; dt = \epsilon$$

Per tant, tenim que $F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$

$\square$

Com podem veure a la demostració, la continuïtat juga un paper clau. Així doncs, ens quedaria preguntar-nos com es generalitzaria aquest teorema quan la funció deixa de ser contínua. Per tal d'aconseguir aquestes generalitzacions, definirem una classe d'operadors: els operadors maximals i, en particular, ens centrarem en l'operador maximal de Hardy-Littlewood, que ens ajuda a demostrar una d'aquestes generalitzacions quan la funció és de L^1. Aquesta generalització és el ben conegut Teorema de Diferenciació de Lebesgue, formalitzat de la següent manera: sigui una funció $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, aleshores per quasi tot punt $x \in \mathbb{R}^n$, tenim una successió de boles euclidianes $B_R(x)$ que tendeixen a x tals que:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} f(y) \; dy = f(x)$$

L'operador maximal de Hardy-Littlewood juga un paper molt important en la demostració del Teorema de Diferenciació de Lebesgue gràcies a una de les seves propietats que es recolza en un lema de recobriment definit per Vitali i que provarem en el primer capítol d'aquest treball. També veurem una altra aplicació d'aquest operador, les aproximacions de la identitat, que tenen bastant importància dins de l'anàlisi i del món de les EDPs.

Una pregunta que hom es pot fer és si el Teorema de Lebesgue seria també vàlid per altres tipus de conjunts que tendeixin a x en comptes d'utilitzar boles euclidianes. La resposta a aquesta pregunta, en general, és negativa, ja que hi ha conjunts que tenen un comportament més estrany, per exemple, el dels rectangles arbitràriament girats a $\mathbb{R}^2$. Així doncs, considerarem diverses bases de conjunts i veurem quines propietats tenen els operadors maximals associats a aquestes bases que fan que es compleixi o no el Teorema de Diferenciació de Lebesgue.

En aquest treball seguirem el mateix ordre que els primers capítols de [8] i incorporarem algunes propietats i exemples de [4]. Començarem amb un capítol deciat als recobriments, on donarem dos tipus de resultats que ens serviran per demostrar la propietat de l'operador maximal que hem mencionat abans. Després, al capítol 2, veurem algunes definicions i teoremes bàsics a l'anàlisi que ens donaran eines per obtenir les diferents propietats i demostracions que utilitzarem al llarg de la resta del treball. Al capítol 3 definirem l'operador maximal de Hardy-Littlewood en el cas de boles euclidianes i entrarem en detall en les seves propietats i aplicacions. Més endavant, al capítol 4, donarem versions d'aquest operador definits en diferents conjunts i relacionarem alguns amb el Teorema de Lebesgue. Per acabar, al capítol 5, donarem una introducció a la Teoria de la Diferenciació, on es relacionaran diferents operadors maximals amb propietats de diferenciació.

Capítol 1

Teoremes de recobriment

En aquest capítol, veurem alguns tipus de recobriment que serviran per demostrar una propietat important de l'operador maximal de Hardy-Littlewood. En particular, introduirem dos tipus: els recobriments de Besicovitch, que definirem per intervals cúbics, i els recobriments de Vitali, que definirem per boles euclidianes.

1.1 Recobriments de Besicovitch

Començarem veient el Teorema de Besicovitch, que encara que originalment estava definit per boles euclidianes a $\mathbb{R}^n$, utilitzant intervals cúbics obtindrem una versió més simple i més clara.

Definició 1.1.1. Anomenem "intervals" de $\mathbb{R}^n$ als rectangles de $\mathbb{R}^n$ amb els costats paral·lels als eixos. Si a més tenen tots els costats iguals, els anomenarem "intervals cúbics".

Abans d'enunciar i demostrar el Teorema de Besicovitch, demostrarem un cas particular d'aquest per donar les idees fonamentals en les quals es basa la prova del teorema i per quantificar valors, ja que en el cas general del Teorema de Besicovitch no poden quantificar-se de manera explícita.

Teorema 1.1.2. *Sigui $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successió decreixent d'intervals cúbics centrats a l'origen de $\mathbb{R}^n$. Suposem que la intersecció numerable d'aquests cubs és l'origen i que A és un conjunt acotat de $\mathbb{R}^n$. Per cada $x \in A$ podem agafar un enter $i(x)$ i denotar $Q(x) = x + Q_{i(x)}$, és a dir, $Q(x)$ és un cub de la successió d'abans centrat a x. Aleshores existeix una successió $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de punts de A tal que:*

i) $A \subseteq \bigcup_k Q(x_k)$

ii) Cada x de $\mathbb{R}^n$ està com a màxim a 2^n cubs de $\{Q(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. És a dir, $\sum \chi_{Q(x_k)}(x) \leq 2^n$

iii) La successió $\{Q(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ pot estar distribuïda en $4^n + 1$ famílies de cubs disjunts.

Prova. Primer construirem aquesta successió $\{Q(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ i després veurem que compleix les tres propietats. Comencem agafant $x_1 \in A$ tal que $Q(x_1)$ tingui mida més gran. Després $x_2 \in A \setminus Q(x_1)$ on $Q(x_1)$ sigui el cub amb mida més gran de tots els cubs que queden i continuem així el procés de selecció.

Siguin $x_1, ..., x_m$ els punts escollits fins ara, si $A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} Q(x_k) = \emptyset$ ja hem acabat. Sinó, prenem un altre $x_{m+1} \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} Q(x_k)$ de tamany màxim i seguim el procés.

És fàcil veure que aquesta col·lecció compleix que si $i \neq j$, aleshores $x_i \notin Q(x_j)$ i que la successió de diàmetres de $\{Q(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ o és finita o tendeix cap a 0 quan $m \to \infty$, ja que els conjunts $x_k + \frac{1}{2} Q_{i(x_k)}$ són disjunts.

Vegem que compleix i). Si el procés de selecció acaba, ja ho tenim. Sinó, sigui $\{Q(x_k)\}_{k\in N}$ una seqüència infinita, suposem que $x \in A \setminus \cup_{k=1}^{\infty} Q(x_k)$. Aleshores existeix un j_0 tal que el diàmetre de $Q(x)$ és més gran que el de $Q(x_{j_0})$, la qual cosa significaria que x ens l'havíem deixat al construir la successió. Per tant $x \notin A \setminus \cup_{k=1}^{\infty} Q(x_k)$.

Per veure la propietat ii) dibuixem a través de x els hiperplans paral·lels als hiperplans coordenats, deixant-nos amb 2^n hiperquadrants tancats. A cada un dels hiperquadrants existeix com a molt un y tal que $Q(y)$ conté x. No pot existir més d'un, ja que si z és del mateix hiperquadrant i $Q(z)$ conté x aleshores el cub més gran entre $Q(y)$ i $Q(z)$ contindria l'altre punt, i això no pot passar per construcció de la successió. Per tant, cada x només pot estar com a molt a 2^n cubs.

Per veure iii) fixem un cub $Q(x_j)$ de la col·lecció. Per la propietat ii), cada vèrtex està contingut com a molt a 2^n cubs de la successió. Cada cub $Q(x_k)$ amb $k < j$ té tamany més gran o igual que $Q(x_j)$ així que si $Q(x_j) \cap Q(x_k) \neq \emptyset$, aleshores $Q(x_k)$ conté almenys algun dels 2^n vèrtexs de $Q(x_j)$. Per tant, per cada $Q(x_j)$ hi ha com a molt $2^n \times 2^n$ conjunts de $\{Q(x_1), ...Q(x_{j-1})\}$ amb intersecció no nul·la amb $Q(x_j)$. Per tant podem distribuir tots els cubs en $4^n + 1$ famílies de cubs disjunts de la següent forma: com hem vist, un cub $Q(x_j)$ interseca amb 4^n cubs, així que distribuint aquests cubs més el propi $Q(x_j)$ en famílies separades, per qualsevol $Q(x_k)$ de la col·lecció inicial hi haurà una família amb la qual la seva intersecció és buida amb tots els elements d'aquella família. Això prova iii).

□

A continuació veurem un teorema de Besicovitch més general que el d'abans. Ara ja no tindrem la successió decreixent d'intervals cúbics, amb la qual cosa intercanviem els valors 2^n i $4^n + 1$ per unes constants més desconegudes C_n i ϵ_n que només sabem que depenen de la dimensió.

Teorema 1.1.3. *Sigui A un conjunt de $\mathbb{R}^n$ fitat tal que per cada x de A, existeix un interval cúbic tancat centrat a x. Aleshores, d'entre tots els intervals cúbics $\{Q(x)\}_{x\in A}$ existeix una subsuccessió $\{Q_k\}$ tal que:*

i) $A \subseteq \bigcup_k Q_k$

ii) Cada x de $\mathbb{R}^n$ està com a màxim a C_n cubs de $\{Q_k\}$. És a dir, $\sum \chi_{Q_k}(x) \leq C_n$

iii) La successió $\{Q_k\}$ pot estar distribuïda en ϵ_n famílies de cubs disjunts.

Prova. Començarem construint la successió i veurem que compleix les tres propietats. Igual que abans, la demostració consisteix a anar escollint els cubs de mida més grans i anar traient-los del domini que va quedant en treure-li els cubs anteriors.

Primer, busquem el suprem dels diàmetres dels cubs: $a_1 = \sup_{x \in A}\{\delta(Q(x))\}$. Si $a_1 = \infty$, agafem un dels cubs amb radi infinit i, clarament, recobreix A. Si $a_1 < \infty$, aleshores agafem un cub $Q_1 \in \{Q(x)\}_{x\in A}$ amb diàmetre $\delta(Q_1) > \dfrac{a_1}{2}$ amb centre x_1.

Ara agafem Q_2 que tingui diàmetre $\delta(Q_2) > \dfrac{a_2}{2}$ on $a_2 = \sup_{x \in A \setminus Q_1}\{\delta(Q(x))\}$ amb centre x_2. Després, escollim Q_3 que tingui diàmetre $\delta(Q_2) > \dfrac{a_3}{2}$ on $a_3 = \sup_{x \in A \setminus (Q_1 \cap Q_2)}\{\delta(Q(x))\}$ i anem repetint el procés.

D'aquesta manera, anem construint una successió $\{Q_k\}$ que compleix que si $i > j$, aleshores $x_i \notin Q_j$ i també $\dfrac{1}{3}Q_i \bigcap \dfrac{1}{3}Q_j = \emptyset$, ja que si la intersecció no fos buida (per exemple, la intersecció fos x), aleshores tindríem $d(x, x_k) \leq \dfrac{\delta(Q_k)}{6}$ i així, si $i > j$ (si $i \leq j$, és el mateix raonament canviant les i per j) tenim $\delta(Q_j) > \frac{\delta(Q_i)}{2}$ amb el que obtenim:

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x, x_j) < \frac{\delta(Q_i)}{6} + \frac{\delta(Q_j)}{6} < \frac{\delta(Q_j)}{2} < \delta(Q_j)$$

Per tant, x_i seria de Q_j, la qual cosa no pot ser. Això implica que o bé la successió és finita, o la successió és infinita i cada cop els diàmetres tendeixen a 0.

Si la construcció acaba en un nombre finit de passos (col·lecció finita), aleshores està clar que compleixen les tres propietats. Si no és el cas:

i) Suposem que no recobreixen A. Sigui $x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$. Com la successió de diàmetres tendeix a 0 hi haurà un j_0 tal que Q_x té diàmetre més gran que Q_{j_0}, però aleshores ja s'hauria considerat en la col·lecció. Per tant, la successió recobreix tot A.

Per demostrar les propietats ii) i iii) s'hauria de seguir una demostració anàloga a la del teorema anterior utilitzant les propietats que hem vist que té la successió $\{Q_k\}$.

□

1.2 Recobriments de Vitali

Tradicionalment, els recobriments de Vitali van ser la primera eina per demostrar el Teorema de Diferenciació de Lebesgue. En aquesta secció veurem els recobriments de Vitali per boles euclidianes contingudes a $\mathbb{R}^n$. Aquí denotarem com (kB) a la bola euclidiana de mateix centre però radi k vegades el de B.

Lema 1.2.1 (Lema dels recobriments de Vitali).

1) *Versió finita:*
Siguin $B_1, B_2, ..., B_n$ una col·lecció finita de boles contingudes a l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ (o a qualsevol altre espai mètric). Aleshores existeix una subcol·lecció finita $\{B_{j_1}, ...B_{j_m}\}$ disjunta tal que:

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} (3B_{j_k}) \tag{1.1}$$

2) *Versió infinita:*
Sigui $\{B_i : i \in I\}$ una col·lecció arbitrària no degenerada de boles contingudes a l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ (o a qualsevol altre espai mètric). Definim R_{B_i} el radi de la bola B_i. Si el $\sup_{i\in I}\{R_{B_i}\} < \infty$, aleshores existeix una col·lecció numerable $\{B_j : j \in J\}$ disjunta amb $J \subseteq I$ tal que:

$$\bigcup_{i\in I} B_i \subseteq \bigcup_{j\in J}(5B_j) \tag{1.2}$$

Prova.

1) Versió finita:
Sense perdre generalitat, suposem que la col·lecció és no buida. Primer construirem la col·lecció de tal forma que sigui disjunta i després ja veurem que amb aquesta col·lecció es compleix la inclusió:

Començarem buscant la bola de radi més gran i l'afegim a la col·lecció (aquesta serà la nostra B_{j_1}). A continuació, de la resta de boles que són disjuntes a B_{j_1}, busquem un altre cop la de radi més gran: B_{j_2}. Anem procedint així de forma inductiva: tenim la col·lecció $\{B_{j_1}, ...B_{j_k}\}$. Si encara queden boles disjuntes a aquesta col·lecció, afegim la de radi més gran i tornem a fer el mateix procediment. Si no hi ha més, fixem $m := k$ i hem acabat la inducció. Hem aconseguit la col·lecció de boles disjuntes: $\{B_{j_1}, ..., B_{j_m}\}$.

Ara, definim $X = \bigcup_{k=1}^{m}(3B_{j_k})$. Vegem que per tota bola $B_i \subset X$ existeix $k \in \{1, ..., m\}$ tal que $B_i \subset (3B_{j_k})$: Trivialment, se satisfà per les boles B_i tals que $i \in \{j_1, j_2, ..., j_m\}$. Vegem les altres. Per construcció, sabem que tota bola B tal que $B \notin \{B_{j_1}, ...B_{j_m}\}$ interseca amb alguna bola d'aquest conjunt (en cas contrari, al ser disjunt seria part d'aquest conjunt). Per veure que $B \subseteq (3B_{j_k})$, veiem que $\forall x \in B, x \in (3B_{j_k})$. Per facilitar notació, farem servir $C = B_{j_k}$. Com estem a un espai mètric, això és el mateix que veure que $\forall x \in B, d(x, x_C) \leq 3R$, éssent x_C l'origen i R_C el radi de la bola C. Sigui $x \in B$. Sigui x_B el seu centre i R_B el radi de la bola B, per la desigualtat triangular tenim

$$d(x, x_C) \leq d(x, x_B) + d(x_B, x_C) \leq R_B + (R_B + R_C) = 2R_B + R_C \leq 3R_C$$

on hem aplicat que $R_B \leq R_C$

2) Versió infinita:
Sigui R el radi de més gran de la col·lecció $F = \{B_i : i \in I\}$ (sabem que el radi és finit per hipòtesi). Farem una partició del conjunt F agrupant les boles en funció del radi de la forma: $F_0 = \left(\frac{R}{2}, R\right], F_1 = \left(\frac{R}{4}, \frac{R}{2}\right], ..., F_n = \left(\frac{R}{2^{n+1}}, \frac{R}{2^n}\right]$. Ara construirem el conjunt de boles disjuntes G. El definim de la següent forma: Sigui $H_0 = F_0$ i G_0 la col·lecció maximal de boles disjuntes de H_0. Inductivament, suposem que tenim $G_0, ...G_n$, definim $H_{n+1} = \{B \in F_{n+1} : B \cap C = \emptyset, \forall C \in G_0 \cap ... \cap G_n\}$ i agafem G_{n+1} la subcol·lecció disjunta maximal de H_{n+1}. Així $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$ és una col·lecció disjunta de boles de la col·lecció F.

Ara vegem que es satisfà que per a tot $B \in F$, existeix un $C \in G$ tal que $B \subset (5C)$. Trivialment, les boles que pertanyen a la col·lecció G ho compleixen. Per demostrar que es compleix per les altres, primer veiem que interseca almenys amb alguna bola de G: Suposem que existeix n tal que $B \in F_n$. Si $B \in H_n$, per maximalitat de G_n, talla a alguna bola de G_n (ja que si no ho fes, formaria part del mateix G_n, ja que el conjunt no seria maximal). Per altra banda, si $B \notin H_n$, aleshores existeix $C \in G_0 \cap ... \cap G_n$ tal que $B \cap C \neq \emptyset$. En els dos casos, la bola B talla amb alguna bola $C \in G_0 \cup ... \cup G_n$. Per tant, com $B \in F_n$ i $C \in G_0 \cup ... \cup G_n$, tenim $R_B \leq \frac{R}{2^n}$ i $R_C > \frac{R}{2^{n+1}}$. Igual que hem dit al cas finit, com estem a un espai mètric, si veiem que $\forall x \in B$ es compleix que $d(x, x_C) \leq 5R_C$ amb x_C el seu centre i R_C el radi de C, aleshores es té que $B \subset (5C)$. Per tant, per la desigualtat triangular:

$$d(x, x_C) \leq d(x, x_B) + d(x_B, x_C) \leq R_B + (R_B + R_C) = 2R_B + R_C$$

Com $2R_C > R_B$, tenim $d(x, x_C) < 5R_C$.

$\square$

Capítol 2

El Teorema d'interpolació de Marcinkiewicz

En aquest capítol introduirem algunes nocions importants que ens serviran per demostrar més endavant algunes propietats de l'operador maximal de Hardy-Littlewood. Començarem per definir què vol dir que un operador lineal o sublineal entre espais L^p sigui fitat de tipus dèbil o fort i arribarem a un dels teoremes més importants d'aquest capítol: el teorema d'interpolació de Marcinkiewicz.

Abans d'entrar en detalls, fem un petit recordatori dels espais $L^p(X, \mu)$.

Definició 2.0.1. Sigui $\{X, \mathcal{A}, \mu\}$ un espai mesurable i sigui E un conjunt mesurable de X. Direm que una funció mesurable $f : E \to \mathbb{R}$ és de $L^p(X, \mu)$ per $1 \leq p < \infty$ si $|f|^p$ és integrable a E, és a dir, si:

$$||f||_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

on $|| \cdot ||_p$ defineix una norma a l'espai $L^p(X, \mu)$ per $1 \leq p < \infty$.

Direm que f és de $L^\infty(X, \mu)$ si f és una funció mesurable que compleix

$$||f||_\infty = \inf\{k : \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq k\}) = 0\} < \infty$$

on $|| \cdot ||_\infty$ defineix una norma a $L^\infty(X, \mu)$. Tant els espais $L^p(X, \mu)$ com l'espai $L^\infty(X, \mu)$ són espais de Banach. Per demostrar-ho i per veure altres propietats, podem consultar [3].

2.1 Acotació (p, q)-dèbil i (p, q)-forta

Definició 2.1.1. Sigui (X, μ) i (Y, ν) dos espais de mesura i T un operador que va de l'espai $L^p(X, \mu)$ a dins l'espai de les funcions mesurables de Y a $\mathbb{C}$. Diem que T està fitat de forma (p, q)-dèbil amb q finit, si compleix que per tot $\lambda > 0$ es té:

$$\mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C||f||_p}{\lambda} \right)^q$$

i és (p, ∞)-dèbil si l'operador està fitat de $L^p(X, \mu)$ a $L^\infty(Y, \nu)$, és a dir, si compleix: $||Tf||_\infty \leq C||f||_p$.

Es diu que l'operador T està fitat de forma (p, q)-forta si està fitat de $L^p(X, \mu)$ a $L^q(Y, \nu)$, és a dir, si compleix: $||Tf||_q \leq C||f||_p$. En particular, direm que l'operador està fitat a L^p si és (p, p)-forta.

Teorema 2.1.2. *Si T està fitat de forma (p,q)-forta, aleshores també és (p,q)-dèbil. En canvi el recíproc no és cert.*

Prova. Definint $E_\lambda = \{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}$, tenim:

$$\begin{aligned}\mu(E_\lambda) &= \int_{E_\lambda} d\mu \leq \int_{E_\lambda} \left(\frac{|Tf(x)|}{\lambda}\right)^q d\mu = \frac{1}{\lambda^q}\int_{E_\lambda} |Tf(x)|^q \, d\mu \leq \frac{1}{\lambda^q}\int_X |Tf(x)|^q \, d\mu \\ &= \frac{\|Tf\|_q^q}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q\end{aligned}$$

on hem usat $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$ perquè T és (p,q)-fort. Per tant, T és (p,q)-dèbil. □

Un cop definits aquests conceptes, podem demostrar un teorema que relaciona les desigualtats (p,q)-dèbils amb la convergència puntual en quasi tot punt.

Teorema 2.1.3. *Sigui $\{T_t\}$ una família d'operadors lineals a L^p i sigui $T^*f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|$. Si T^* és (p,q)-dèbil, aleshores el conjunt $\{f \in L^p : \lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x)$ en quasi tot punt$\}$ és tancat a L^p, on t_0 és un valor fixat que depèn de la família d'operadors.*

Prova. Sigui $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions per les quals $T_t f_n(X)$ convergeix a $f_n(x)$ en quasi tot punt i sigui f el seu límit en norma L^p. Aleshores:

$$\begin{aligned}&\mu(\{x \in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\}) \leq \\ &\leq \mu(\{x \in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t(f-f_n)(x) - (f-f_n)(x)| > \lambda\}) \\ &\leq \mu\left(\left\{x \in X : T^*(f-f_n)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X : |(f-f_n)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\ &\leq \left(\frac{2C}{\lambda}||f-f_n||_p\right)^q + \left(\frac{2}{\lambda}||f-f_n||_p\right)^p \longrightarrow 0\end{aligned}$$

quan $n \to \infty$. Per tant, tenim:

$$\begin{aligned}&\mu(\{x \in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > 0\}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0\end{aligned}$$

□

Aquest teorema es farà servir a la secció 3.3 del pròxim capítol, que es correspon amb la secció de les aproximacions de la identitat.

2.2 Teorema d'interpolació de Marcinkiewicz

Començarem aquesta secció enunciant i demostrant un lema que ens serà molt útil en diverses demostracions al llarg d'aquest treball, per exemple, en el teorema d'interpolació de Marcinkiewicz que provarem després.

Lema 2.2.1. *Sigui $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ diferenciable, creixent i tal que $\phi(0) = 0$. Aleshores, si definim $a_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$, tenim:*

$$\int_X \phi(|f(x)|)\ d\mu = \int_0^\infty \phi'(\lambda)\ a_f(\lambda)\ d\lambda$$

Prova. Intercanviant l'ordre d'integració, que es pot perquè la funció és diferenciable i creixent, tenim:

$$\begin{aligned}\int_X \phi(|f(x)|)\ d\mu &= \int_X \int_0^{|f(x)|} \phi'(\lambda)\ d\lambda\ d\mu = \int_0^\infty \int_{\{x\in X:|f(x)|>\lambda\}} \phi'(\lambda)\ d\mu\ d\lambda \\ &= \int_0^\infty \phi'(\lambda)\ \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})\ d\mu = \int_0^\infty \phi'(\lambda)\ a_f(\lambda)\ d\lambda\end{aligned}$$

□

Abans d'enunciar i demostrar el teorema, cal que definim l'espai suma $L^{p_0}(X, \mu)+L^{p_1}(X, \mu)$, que és l'espai de les funcions que es poden descompondre com a suma de cada un dels espais. És a dir, si $f \in L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$, aleshores existeix una $f_0 \in L^{p_0}$ i una $f_1 \in L^{p_1}$ tal que $f = f_0 + f_1$.

Teorema 2.2.2 (Teorema d'interpolació de Marcinkiewicz)**.**

Sigui (X, μ) i (Y, ν) espais de mesura i p_0 i p_1 dos valors tals que $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$. Sigui T un operador sublineal de $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ a l'espai de funcions mesurables Y tal que T es (p_0, p_0)-dèbil i (p_1, p_1)-dèbil. Aleshores T és (q, q)-fort per a tot q tal que $p_0 < q < p_1$.

Prova. Com $f \in L^{p_0} + L^{p_1}$, descomponem f en dues funcions de la forma $f = f_0 + f_1$ on

$$f_0 := f\chi_{\{x\in X:|f(x)|>c\lambda\}}$$

$$f_1 := f\chi_{\{x\in X:|f(x)|\leq c\lambda\}}$$

on c és una constant que escollirem més endavant. Aleshores, és fàcil veure que $f_0 \in L^{p_0}$ i $f_1 \in L^{p_1}$. Per altra banda, com T és sublineal, tenim que $|T(f)| \leq |T(f_0)| + |T(f_1)|$, amb el que obtenim:

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in X : |T(f)(x)| > \lambda\}) &\leq \mu(\{x \in X : |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)| > \lambda\}) \\ &\leq \mu\left(\left\{x \in X : |Tf_0| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X : |Tf_1| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)\end{aligned}$$

Anem a demostrar ara que T és (q, q)-fort. Per fer-ho, separarem en dos casos, quan $p_1 = \infty$ i quan no ho és:

$\underline{p_1 = \infty}$

Si $p_1 = \infty$, tenim que f_1 està fitat a L^∞. Escollint $c = \frac{1}{2A_1}$ on A_1 és la constant tal que $||T(f_1)||_\infty \leq A_1||f_1||_\infty$, tenim que

$$\mu\left(\left\{x \in X : |Tf_1| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leq \mu(\{x \in X : ||f_1||_\infty > c\lambda\} = 0$$

Així, utilitzant el lema anterior amb $\phi(|Tf|) = |Tf|^q$, la desigualtat (p_0, p_0)-dèbil i el teorema de Fubini, vegem que és (q, q)-fort:

$$\begin{aligned}
||Tf||_q^q &= q \int_0^\infty \lambda^{q-1}\ \mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\})\ d\lambda \leq q \int_0^\infty \lambda^{q-1}\ \mu(\{x \in X : |Tf_0(x)| > \lambda\})\ d\lambda \\
&\leq q \int_0^\infty \lambda^{q-1-p_0}\ (2A_0)^{p_0} \int_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0}\ d\mu\ d\lambda \\
&= q\ (2A_0)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} \lambda^{q-1-p_0}\ d\lambda\ d\mu \\
&= q\ (2A_0)^{p_0} \int_X |f(x)|^{p_0}\ \frac{1}{q-p_0}\ \frac{|f(x)|^{q-p_0}}{c^{q-p_0}}\ d\mu = \frac{q(2A_0)^{p_0}}{(q-p_0)C^{q-p_0}} \int_X |f(x)|^q\ d\mu \\
&= \frac{q}{q-p_0}\ (2A_0)^{p_0}\ (2A_1)^{q-p_0}\ ||f||_q^q = C'||f||_q^q
\end{aligned}$$

$\underline{p_1 < \infty}$

Siguin A_0 i A_1 les constants de les desigualtats (p_0, p_0)-dèbil (p_1, p_1)-dèbil, fent una demostració similar a la d'abans, vegem que és (q, q)-fort:

$$\begin{aligned}
||Tf||_q^q &= q \int_0^\infty \lambda^{q-1}\ \mu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\})\ d\lambda \\
&\leq q \int_0^\infty \lambda^{q-1}\ \mu(\{x \in X : |Tf_0(x)| > \lambda\})\ d\lambda + q \int_0^\infty \lambda^{q-1}\ \mu(\{x \in X : |Tf_1(x)| > \lambda\})\ d\lambda \\
&\leq q\ (2A_0)^{p_0} \int_X |f(x)| \int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} \lambda^{q-p_0-1}\ d\lambda\ d\mu + q\ (2A_1)^{p_1} \int_X |f(x)| \int_{\frac{|f(x)|}{c}}^\infty \lambda^{q-p_0-1}\ d\lambda\ d\mu \\
&= \left(\frac{q\ (2A_0)^{p_0}}{(q-p_0)\ c^{q-p_0}} - \frac{q\ (2A_1)^{p_1}}{(q-p_1)\ c^{q-p_1}} \right) ||f||_q^q = C||f||_q^q
\end{aligned}$$

$\square$

A partir d'ara considerarem l'espai $\mathbb{R}^n$ i la mesura de Lebesgue. L'espai $L^p(X, \mu)$ l'escriurem simplement L^p.

Capítol 3

L'operador maximal de Hardy-Littlewood

L'operador maximal de Hardy-Littlewood que veurem a continuació juga un paper molt important en la demostració del Teorema de Diferenciació de Lebesgue, que és clau en moltes parts de l'anàlisi, i serveix també per fitar altres operadors, aconseguint així que aquests heretin les propietats d'aquest operador.

Aquest operador es pot definir de formes molt diverses. En aquest capítol només veurem el cas definit amb boles euclidianes centrades i les seves propietats. La definició per altres conjunts i com es relacionen entre ells serà abordada al capítol següent.

3.1 Definició i propietats

Definició 3.1.1. Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció localment integrable, anomenem funció maximal de Hardy-Littlewood a la funció definida de la forma:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy \tag{3.1}$$

on $B_r(x)$ denota la bola de centre x i radi r i $|E|$ denota la mesura de Lebesgue n-dimensional de $E \subseteq \mathbb{R}^n$ i a M l'anomenarem l'operador maximal de Hardy-Littlewood.

Propietats:

a) $M(f)$ és mesurable i compleix que $M(f)(x) \geq 0$ per a tot x de $\mathbb{R}^n$ i per tota funció f localment integrable.

Prova. Per provar la mesurabilitat, observem que, fixat $x \in \mathbb{R}^n$, els valors mitjans que defineixen Mf són funcions contínues del radi r, per aquest motiu podem prendre a la definició de $Mf(x)$ el suprem sobre boles de radi racional:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy = \sup_{r\in\mathbb{Q}^+} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

És a dir, tenim una funció que coincideix amb el suprem d'una successió de funcions reals mesurables i per tant, aquest és mesurable; i.e., $Mf(x) = \sup_{r\in\mathbb{Q}^+} \{g_r(x)\}$, on

$g_r(x) = \dfrac{1}{|B(x,r)|} \displaystyle\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$. La segona propietat és evident. □

b) L'operador és sublineal, és a dir, compleix:

$$M(f+g)(x) \leq M(f)(x) + M(g)(x)$$
$$M(\lambda f)(x) = |\lambda| M(f)(x)$$

c) L'operador és $(1,1)$-dèbil i (p,p)-fort per a tot p tal que $1 < p \leq \infty$.

Prova. Per a aquesta demostració utilitzarem els recobriments de Vitali, que hem vist al capítol de recobriments d'aquest treball.

Comencem veient que l'operador és $(1,1)$-dèbil. És a dir, hem de veure que l'operador compleix per cada $\lambda > 0$: $|\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \dfrac{C||f||_1}{\lambda}$.

Sigui $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Mf(x) > \lambda$, per definició de l'operador maximal tenim que existeix una bola B de radi R tal que $\dfrac{1}{|B_R(x)|}\displaystyle\int_{B_R(x)} |f(y)|dy > \lambda$, la qual cosa és equivalent a $|B_R(x)| < \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_{B_R(x)} |f(y)|dy$. Aleshores, per cada x del conjunt podem agafar una bola centrada en x, obtenint:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$$

Ara, pel lema de recobriments de Vitali (1.2.1), existeix una subcol·lecció numerable disjunta $\{B_j : j \in J\}$ tal que $\displaystyle\bigcup_{i \in I} B_i \subseteq \bigcup_{j \in J} (5B_j)$. Per tant,

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}| &\leq \sum_{j \in J} 5^n \; |B_j| \leq 5^n \sum_{j \in J} \frac{1}{\lambda} \int_{B_j(x)} |f(y)|dy \\ &= \frac{5^n}{\lambda} \int |f(y)| \left(\sum_{j \in J} \chi_{B_j} \right) dy \leq \frac{5^n}{\lambda} ||f||_1 \end{aligned}$$

on l'última desigualtat ha sigut gràcies al fet que la subcol·lecció de boles era disjunta.

Finalment, és fàcil veure que l'operador és (∞,∞)-fort, així que aplicant el Teorema de Marcinkiewicz, obtenim que l'operador és (p,p)-fort per tot $1 < p < \infty$. □

La cerca de l'ínfima cota C que compleixi la propietat $(1,1)$-dèbil ha portat a alguns a autors a utilitzar diferents eines per anar reduint el valor de C. En aquest treball no entrarem en detalls, però podem veure alguns resultats a [12], on s'obté la fita més fina per la funció maximal centrada definida a la recta real $\mathbb{R}$.

En aquest treball ens conformarem amb unes cotes més senzilles d'obtenir i que utilitzarem en diferents apartats més endavant. Aquestes fites vénen donades per la següent proposició, extreta de [6].

Proposició 3.1.2. *Sigui f una funció mesurable a $\mathbb{R}^n$ i $\lambda > 0$. Aleshores:*

$$\frac{C'}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}} |f(x)| \; dx \leq |E_\lambda| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda/2\}} |f(x)| \; dx$$

on $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$.

Prova. Per demostrar la segona desigualtat, separem $f = f_1 + f_2$ on $f_1(x) = f(x)$ quan $|f(x)| > \lambda/2$ i $f_1(x) = 0$ altrament i $f_2 = f - f_1$. Això fa que $Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x) \leq Mf_1(x) + \lambda/2$. Amb el que obtenim $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_2(x) > \lambda/2\} = \emptyset$, i per tant:

$$|E_\lambda| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_1(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\, dx = \frac{\tilde{C}}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda/2\}} |f(x)|\, dx$$

Per demostrar la primera desigualtat, utilitzarem una propietat de la descomposició de Calderón-Zygmund que demostrarem al teorema 4.5.4 que diu que si tenim una funció $f \in L^1$, podem trobar cubs disjunts Q_j tals que:

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \leq 2^n \lambda$$

i que $|f(x)| \leq \lambda$ per quasi tot $x \notin \bigcup Q_j$.

Com per tot $x \in Q_j$ tenim que $Mf(x) > \lambda$, aleshores:

$$|E_\lambda| \geq \sum_j |Q_j| \geq \frac{1}{2^n \lambda} \sum_j \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \geq \frac{C}{\lambda} \int_{\{x : |f(x)| > \lambda\}} |f(x)|\, dx$$

on l'última desigualtat apareix perquè per quasi tot punt $x \notin \bigcup Q_j$, es té $|f(x)| \leq \lambda$, amb el que aconseguim la fita inferior.

$\square$

Mirant la propietat que l'operador M és (p,p)-fort per tot $1 < p \leq \infty$, hom es podria preguntar si aquest operador és també $(1,1)$-fort també. Aquesta hipòtesi, però, és falsa, ja que l'operador no està fitat a $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposició 3.1.3. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f > 0$, aleshores $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$*

Prova. Com $f > 0$, aleshores existeix un $\delta > 0$ tal que $\int_{B_\delta} f(x)\, dx \geq \epsilon > 0$. Si $|x| > \lambda$ tenim que per tot x^* de B_δ, $d(x, x^*) < 2\delta < 2|x|$, així que $B_\delta \subseteq B_{2|x|}(x)$, amb el que:

$$Mf(x) \geq \frac{1}{(2|x|)^n} \int_{B_\delta} f(y)\, dy \geq \frac{\epsilon}{2^n |x|^n}$$

En canvi, aquesta funció no és integrable, de manera que Mf tampoc ho és. $\square$

Ara queda preguntar-se quan podem dir que la funció maximal és integrable. Per respondre a això, definirem el conjunt $L \log L$.

Definició 3.1.4. Sigui A un conjunt mesurable, direm que una funció f pertany a l'espai $L \log L(A)$ si:

$$\int_A f(x) \log^+ f(x)\, dx < \infty$$

Això és equivalent a dir que $f \log^+ f \in L^1(A)$, on $\log^+ f = \max\{0, \log f\}$.

Aquest espai és un espai de Banach amb la seva norma associada. És un cas particular dels espais d'Orlicz, que són un conjunt d'espais que generalitzen els espais L^p. Per veure que aquests espais són de Banach i quina és la seva norma, podem trobar la informació a [11].

Ara, veurem un lema que utilitzarem en el teorema que vindrà a continuació:

Lema 3.1.5. *Sigui f una funció que tingui suport a una bola B i suposem que $Mf \in L^1(B)$. Aleshores, per cada $t_0 > 0$ tenim que:*

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>t_0\}} Mf(x)dx < \infty$$

Prova. Sigui $\widetilde{B}$ la bola concèntrica a B amb radi doble, aleshores $Mf \in L^1(\widetilde{B})$, ja que si $x \in \widetilde{B}\backslash B$ i $y \in B$ el punt simètric a x respecte de la frontera de B aleshores es té $Mf(x) \leq Mf(y)$. A més, en el complementari de $\widetilde{B}$, Mf està fitat, ja que estem més lluny d'una distància fixada de B, que és el suport de f. A més, si $|x| \to \infty$, aleshores $Mf(x) \to 0$. Per tant, per cada $t_0 > 0$, tenim:

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>t_0\}} Mf(x)dx < \infty$$

Per tant, hem demostrat el que volíem. $\square$

Vegem ara que la integrabilitat de la funció maximal associada a boles es caracteritza, amb l'espai que acabem de definir, de la següent manera:

Teorema 3.1.6. *Sigui $f \in L^1$ amb suport a B compacte. Aleshores:*

$$Mf \in L^1(B) \textit{ si, i només si, } f \in L\log^+ L(B)$$

on $\log^+ f = max\{0, \log f(x)\}$.

Prova. Per veure la implicació cap a l'esquerra, utilitzant el lema 2.2.1 i el teorema 3.1.2 tenim:

$$\begin{aligned}\int_B Mf(x)\ dx &= \int_0^\infty |\{x\in B : Mf(x)>\lambda\}|\ d\lambda = 2\int_0^\infty |\{x\in B : Mf(x)>2\lambda\}|\ d\lambda \\ &\leq 2|B| + \int_1^\infty |\{x\in B : Mf(x)>2\lambda\}|\ d\lambda \leq 2|B| + \int_1^\infty \frac{C}{\lambda}\int_{\{x:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|\ dx\ d\lambda \\ &= 2|B| + C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_1^{|f(x)|} \frac{dt}{t}\ dx = 2|B| + C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\log^+|f(x)|\ dx < \infty\end{aligned}$$

Per demostrar la implicació cap a la dreta, utilitzem el lema 3.1.5 que hem demostrat abans, és a dir, que per cada $t_0 > 0$ es té:

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>t_0\}} Mf(x)\ dx < \infty$$

En particular, si agafem $t_0 = 1$, obtenim, aplicant el teorema 3.1.2:

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>1\}} Mf(x)dx &\geq \int_1^\infty |\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}|d\lambda \geq \int_1^\infty \frac{C}{\lambda}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|dxd\lambda \\ &= C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_1^{|f(x)|} \frac{d\lambda}{\lambda}dx = C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\log^+|f(x)|dx\end{aligned}$$

I per tant, si $Mf \in L^1$ aleshores $f \in L\log^+ L$.

$\square$

3.2 Teorema de Diferenciació de Lebesgue per boles

A continuació veurem uns dels teoremes clau de l'anàlisi real i en el qual l'operador maximal de Hardy-Littlewood juga un paper molt important. Aquest teorema és el Teorema de Diferenciació de Lebesgue.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Diferenciació de Lebesgue)**.** *Sigui* $f \in L^1_{loc}$*, aleshores:*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)\ dy = f(x) \text{ per q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n \tag{3.2}$$

Prova. Suposarem que $f \in L^1$. Per demostrar aquest teorema provarem una cosa una mica més general que implica aquest teorema. El que volem provar és que

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)\ dy - f(x) \right| > \lambda \right\}$$

té mesura nul·la. Per veure això, aproximem la funció f per una funció g contínua, ja que les funcions contínues són denses a L^1 (com podem veure a l'apèndix d'aquest treball), de forma que $\|f-g\|_1 < \epsilon$. Si definim $h = f - g$, com g compleix (3.2) per ser continua, tenim:

$$\begin{aligned}
&\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} (f(y) - f(x))\ dy \right| > \lambda \right\} \\
=&\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} (h(y) - h(x))\ dy \right| > \lambda \right\} \\
\subseteq&\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} h(y)\ dy \right| > \frac{\lambda}{2} \right\} \bigcup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\}
\end{aligned}$$

El límit superior del primer terme compleix que està fitat per l'operador maximal de Hardy-Littlewood:

$$\frac{\lambda}{2} < \limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} h(y)\ dy \right| \leq \limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |h(y)|\ dy \leq Mh(x)$$

Per tant, utilitzant a la primera part la condició que l'operador és $(1,1)$-dèbil i a la segona part l'aproximació de $f-g$ obtenim:

$$\begin{aligned}
&\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : Mh(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \frac{2C_n}{\lambda} \|h\|_1 \leq \frac{2C_n \epsilon}{\lambda} \\
&|\{ x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \lambda \}| \leq \frac{2\epsilon}{\lambda}
\end{aligned}$$

Com ϵ és arbitràriament petit, ja ho tenim.

□

Definició 3.2.2. Anomenem punts de Lebesgue als punts de $\mathbb{R}^n$ pels quals (3.2) es compleix.

Aleshores, pel teorema de diferenciació de Lebesgue que acabem de veure, quasi tot punt $x \in \mathbb{R}^n$ és de Lebesgue. A més, com a conseqüència, tenim que $|f(x)| \leq Mf(x)$ per tot punt de Lebesgue i, per tant, per quasi tot punt $x \in \mathbb{R}^n$.

Corol·lari 3.2.3. *(Teorema de Densitat de Lebesgue) Sigui A un conjunt mesurable amb $|A| > 0$. Aleshores per quasi tot punt $x \in \mathbb{R}^n$, tenim:*

$$\lim_{r \to 0} \frac{|A \cap B_r(x)|}{|B_r(x)|} = \chi_A(x)$$

El Teorema de Diferenciació de Lebesgue i el de densitat que hem vist s'han obtingut a partir d'una successió de boles euclidianes que tendeixen al punt x. Hom es podria preguntar si els dos es compleixen siguin quins siguin els conjunts. Als capítols següents veurem que la resposta és negativa i donarem caracteritzacions dels conjunts que sí que ho compleixen.

3.3 Aproximacions de la identitat

A continuació, veurem una altra de les aplicacions més importants a l'anàlisi harmònica, que és l'estudi de les aproximacions de la identitat.

Definició 3.3.1. Sigui ϕ una funció integrable a $\mathbb{R}^n$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = 1$, podem definir una família de funcions $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(t^{-1}x)$ per $t > 0$. A aquesta família de funcions les anomenem aproximacions de la identitat.

NOTA: Podem veure que es compleix:

$$(\phi_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y) f(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}\phi(t^{-1}y) f(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(z) f(x-tz)\,dz$$

Aquest nom prové de que si fem tendir t a 0, aleshores la successió $\{\phi_t\}$ tendeix en el sentit de les distribucions cap a la distribució delta de Dirac, que juga el paper d'operador identitat en la convolució. A [4] podem trobar una demostració d'aquesta propietat.

Una pregunta natural que ens podem fer sobre aquestes funcions és sobre la convergència de $\phi_t * f$ cap a una funció f. Començarem veient la seva convergència en norma L^p:

Teorema 3.3.2. *Sigui $\{\phi_t\}_{t>0}$ una aproximació de la identitat. Aleshores, $\lim_{t \to 0} \|\phi_t * f - f\| = 0$ si $f \in L^p$ amb $1 \le p < \infty$.*

Prova. Com ϕ té integral 1, tenim:

$$(\phi_t * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)[f(x-ty) - f(x)]\,dy$$

Així, sigui $\epsilon > 0$ escollim $\lambda > 0$ tal que si $|ty| < \lambda$, o equivalentment, $|y| < \frac{\lambda}{t}$. Aleshores

$$\|f(x-ty) - f(x)\|_p \le \frac{\epsilon}{2\|\phi\|_1}$$

Amb aquest mateix λ, si t és suficientment petit, es compleix: $\int_{|y| \ge \lambda/t} |\phi(y)|\,dy < \frac{\epsilon}{4\|f\|_p}$. Per tant, utilitzant la desigualtat integral de Minkowski, que podem trobar demostrada a la pàgina 227 del llibre [3], obtenim:

$$\begin{aligned}
\|\phi_t * f - f\|_p &= \left\|\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)[f(x-ty) - f(x)]\,dy\right\|_p \le \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)| \cdot \|f(x-ty) - f(x)\|_p\,dy \\
&= \int_{|y|<\lambda/t} |\phi(y)| \cdot \|f(x-ty) - f(x)\|_p\,dy + \int_{|y| \ge \lambda/t} |\phi(y)| \cdot \|f(x-ty) - f(x)\|_p\,dy \\
&\le \frac{\epsilon}{2\|\phi\|_1} \int_{|y|<\lambda/t} |\phi(y)|\,dy + 2\|f\|_p \int_{|y| \ge \lambda/t} |\phi(y)|\,dy < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

□

En aquest teorema hem vist que $\phi_t * f$ convergeix a f en norma L^p. Pel teorema 2.9 de [2], existeix una subsuccessió ϕ_{t_k} tal que $\phi_{t_k} * f$ convergeix puntualment a f per quasi tot $x \in \mathbb{R}^n$. Això ens fa preguntar quines serien les condicions suficients perquè $\lim_{t\to 0}(\phi_t * f)(x)$ convergeixi puntualment a la funció f. Per veure-ho, hem de demostrar el següent teorema, que utilitzarà la funció maximal de Hardy-Littlewood:

Corol·lari 3.3.3. *Sigui ϕ una funció positiva, radial ($\phi(x) = \phi(|x|)$), decreixent i integrable. Aleshores:*

$$\sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)| \leq \|\phi\|_1 Mf(x)$$

Prova. Sigui ϕ una funció positiva i integrable, aleshores es pot aproximar per un conjunt de funcions simples integrables $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tals que $0 \leq \sigma_k(x) \leq f(x)$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$. Per tant, si veiem que aquestes funcions σ compleixen l'enunciat, també ho compleix ϕ. Com σ és simple, tenim:

$$\sigma(x) = \sum_j a_j \chi_{B_{R_j}}(x)$$

amb $a_j > 0$. Aleshores, multiplicant i dividint per $|B_{R_j}|$ tenim:

$$\sigma * f(x) = \sum_j a_j (\chi_{B_{R_j}} * f)(x) = \sum_j a_j |B_{R_j}| \cdot \frac{(\chi_{B_{R_j}} * f)(x)}{|B_{R_j}|} \leq \|\sigma\|_1 Mf(x)$$

ja que $\|\sigma\|_1 = \sum_j a_j |B_{R_j}|$. Per tant, ϕ també compleix el teorema, i com les ϕ_t són dilatacions de ϕ, aquestes també són funcions positives, radials, decreixents i integrables que compleixen la mateixa desigualtat. $\square$

A continuació veurem que tant aquestes funcions com les funcions que estan fitades per una altra funció ψ que sí que té les característiques d'abans, hereten les propietats fortes i dèbils de l'operador maximal.

Corol·lari 3.3.4. *Si $|\phi(x)| \leq \psi(x)$ en quasi tot punt on ψ és positiva, radial, decreixent i integrable, aleshores la funció maximal $\sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)|$ és $(1,1)$-dèbil i (p,p)-fort per $1 < p \leq \infty$.*

Prova.

$$\sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)| \leq \|\phi\|_1 Mf(x) \leq \|\psi\|_1 Mf(x) = cMf(x)$$

Així, la funció maximal $\sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)|$ hereta de l'operador maximal les propietats de $(1,1)$-dèbil i (p,p)-fort per $1 < p \leq \infty$ $\square$

Ajuntant aquest corol·lari amb el teorema 2.1.3, obtenim:

Corol·lari 3.3.5. *Amb les mateixes hipòtesis que el corol·lari anterior, tenim que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p < \infty$ o si $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, aleshores:*

$$\lim_{t\to 0} (\phi_t * f)(x) = \|\phi\|_1 f(x) \textit{ per quasi tot punt}$$

EXEMPLES

1. Nucli de Fejér: Definim les aproximacions de la identitat del Nucli de Fejér de la forma:

$$F_R(x) = \frac{1}{R}\int_0^R D_t(x)dt = \frac{1}{R} \cdot \frac{(sin(\pi R x))^2}{(\pi x)^2}$$

amb $D_R(x) = \int_{-R}^{R} e^{2\pi i x\psi} d\psi = \frac{sin(2\pi Rx)}{\pi x}$, anomenat Nucli de Dirichlet.

Vegem que la norma L^1 d'aquestes dilatacions també és $||F_R||_1 = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}} F_R(x)dx = \frac{1}{R}\int_{\mathbb{R}} \frac{(sin(\pi Rx))^2}{(\pi x)^2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{(sinu)^2}{u^2}du$$

Per veure que $\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = 1$, usem integració per parts prenent $u = \sin^2 x$, $dv = x^{-2}$ i arribem a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 2x}{x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi.$$

on la primera igualtat és conseqüència de la integració per parts, la segona efectuant el canvi de variable $2x = y$ i de la tercera pot trobar-se una demostració a la pàgina 297 de [1], mitjançant integració per residus.

2. Nucli de Poisson: Definim el nucli de Poisson de la forma:

$$P_1(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Aquest nucli és molt rellevant en l'anàlisi harmònic, ja que la funció $u(x,t) = (P_1 * f)(x)$ és solució de la ben coneguda equació de Laplace, que en formulació de Dirichlet, té aquesta forma:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{a } \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u(x,t) = f(x) & \text{on } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Dilatant el nucli de Poisson, aconseguim una família d'aproximacions de la identitat:

$$P_t(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{t}{(t^2+|x|)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Fent un canvi a coordenades esfèriques, aconseguim veure que $||P_1||_1 = 1$.

3. Nucli de Gauss-Weierstrass: Definim el nucli de Gauss com:

$$W_1(x) = e^{-\pi|x|^2}$$

D'aquí podem treure també, dilatant el nucli, aproximacions de la identitat de la forma W_t on

$$W_t(x) = \frac{1}{t^n}e^{\frac{-\pi|x|^2}{t^2}}$$

Usant la integral de Gauss, és fàcil veure que les seves integrals a L^1 també són 1.

Aquest nucli és també molt important a l'anàlisi perquè si definim $u(x,t) = (W_t * f)(x)$, aleshores $v(x,t) = u(x, \sqrt{4\pi t})$ és la solució de l'equació de la calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & \text{a } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) & \text{on } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Utilitzant el teorema 3.3.2 que hem vist abans, podem dir que les funcions de la forma $\phi * f$ on ϕ són els nuclis definits als exemples anteriors, convergeixen en norma L^p. A més, utilitzant els corol·laris anteriors vegem que convergeixen també puntualment quasi en tot punt a f, ja que els nuclis de Poisson i els de Gauss-Weierstrass són decreixents i, per altra banda, el nucli de Fejér no és decreixent, però es pot fitar de la forma: $F_1(x) \leq \min\left(1, \dfrac{1}{(\pi x)^2}\right)$, així que també satisfà el corol·lari 3.3.5.

Capítol 4

Altres bases de diferenciació

En aquest capítol veurem variants de l'operador maximal de Hardy-Littlewood definides en intervals cúbics, cubs diàdics, boles no centrades i altres conjunts i veurem com es comparen entre ells, si comparteixen les mateixes propietats o no, així com estudiar si compleixen també el Teorema de Diferenciació de Lebesgue.

4.1 Bases de diferenciació i de Busemann-Feller

Començarem el capítol definint alguns conceptes que anirem utilitzant més endavant.

Definició 4.1.1. Sigui x un punt de $\mathbb{R}^n$ definirem com $\mathcal{B}(x)$ a una col·lecció de conjunts fitats a $\mathbb{R}^n$ de mesura positiva tals que contenten x i que existeix una successió $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(x)$ tals que $\delta(R_k) \to 0$. A tota la col·lecció $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} \mathcal{B}(x)$ l'anomenarem base de diferenciació.

A partir d'ara, sempre considerarem un tipus especial de base, que anomenarem base de Busemann-Feller, ja que ens evitarà problemes de mesurabilitat dels operadors maximals involucrats.

Definició 4.1.2. Una base $\mathcal{B}$ de conjunts oberts l'anomenarem base de Busemann-Feller (o base B-F) si per tot $R \in \mathcal{B}$ i tot $x \in R$ tenim que $x \in \mathcal{B}(x)$.

En aquest capítol veurem tres bases de diferenciació: La base dels intervals cúbics $\mathcal{B}_Q$, la base dels intervals de $\mathbb{R}^n$ (rectangles de $\mathbb{R}^n$ amb els costats paral·lels als eixos) $\mathcal{B}_R$ i la base dels rectangles arbitràriament girats a $\mathbb{R}^n$, denotat com $\mathcal{B}_P$. També anomenarem $\mathcal{B}_B$ a la base de les boles euclidianes de $\mathbb{R}^n$. Les quatre bases les podem veure resumides a la figura 4.1.

4.2 L'operador maximal definit a intervals cúbics centrats

Definició 4.2.1. Sigui $\mathcal{B}_Q$ la base de diferenciació dels intervals cúbics oberts centrats al punt x, definim l'operador maximal per cubs com:

$$M_Q f(x) = \sup_{Q_C \in \mathcal{B}(x)} \frac{1}{|Q_C(x)|} \int_{Q_C(x)} |f(y)| dy$$

on cada $Q_C(x) \in \mathcal{B}_Q$ és un interval cúbic centrat a x.

Igual que al capítol anterior, és fàcil veure que compleix les propietats a) i b). Aquest operador també compleix la cota $(1,1)$-dèbil, igual que abans. Per demostrar-ho, podem utilitzar

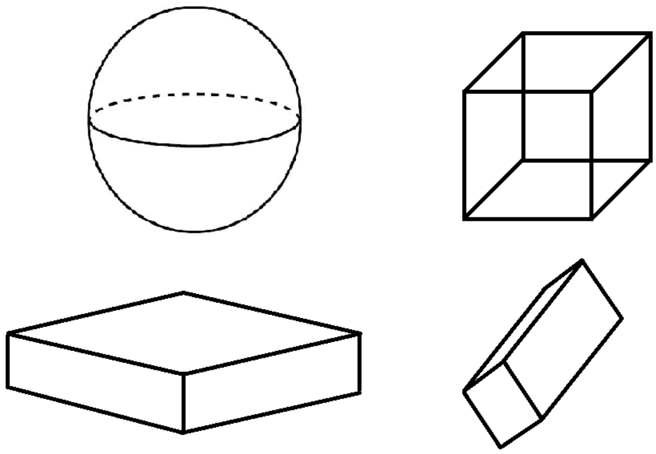

Figura 4.1: Aquí es poden veure $\mathcal{B}_B$, $\mathcal{B}_Q$, $\mathcal{B}_R$ i $\mathcal{B}_P$ respectivament

la relació que hi ha entre cubs i boles centrades a un punt x, que diu que existeixen constants C_n i c_n que depenen només de la dimensió tals que:

$$c_n M_Q f(x) \leq Mf(x) \leq C_n M_Q f(x) \tag{4.1}$$

i utilitzant que $Mf(x)$ és $(1,1)$-dèbil ja ho tindríem.

Aquí, però, farem una demostració alternativa utilitzant els recobriments de Besicovitch, vistos al primer capítol d'aquest treball:

Proposició 4.2.2. *L'operador M_Q és de tipus $(1,1)$-dèbil.*

Prova. Definint $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ i sigui K un compacte de $\mathbb{R}^n$ (tancat i fitat). Per cada $x \in E_\lambda \cap K$, podem escollir un interval cúbic $Q(x)$ centrat a x tal que

$$\frac{1}{|Q(x)|}\int_{Q(x)} |f(y)|dy > \lambda \Longrightarrow |Q(x)| < \frac{1}{\lambda}\int_{Q(x)} |f(y)|dy$$

Ara, aplicant el teorema 1.1.3 (Teorema de Besicovitch) a $E_\lambda \cap K$, obtenim una subseqüència $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{Q(x)\}_{x\in E_\lambda\cap K}$ tal que $E_\lambda \cap K \subseteq \bigcup Q_k$ i tal que $\sum_k \chi_{Q_k} \leq C_n$. Per tant:

$$|E_\lambda \cap K| \leq |\bigcup_k Q_k| \leq \sum_k |Q_k| \leq \frac{1}{\lambda}\sum_k \int_{Q_k} |f(y)|dy = \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \sum_k \chi_{Q_k}(y)dy \leq \frac{C_n}{\lambda}||f||_1$$

Com aquest resultat serveix per a tot compacte K, aleshores l'estimació es compleix sempre, amb el que tenim $|E_\lambda| \leq \dfrac{C_n}{\lambda}||f||_1$ □

Per tant, utilitzant la interpolació de Marcinkiewicz un altre cop, obtenim també que l'operador per cubs centrats està fitat a L^p per tot p tal que $1 < p \leq \infty$.

Fins ara hem definit l'operador maximal centrat a punts x de l'espai, però també podem considerar dominis on imposem que x només pertanyi al conjunt:

Definició 4.2.3. Anomenem l'operador maximal definit a cubs no centrat a

$$M_{Q_{NC}}f(x) = \sup_{Q \ni x, Q \in \mathcal{B}_Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$$

on Q és un interval cúbic que conté x.

Aquests dos operadors tenen la següent relació:

$$M_Q f(x) \leq M_{Q_{NC}} f(x) \leq 2^n M_Q f(x)$$

Prova. La primera desigualtat és trivial. Vegem la segona: Sigui Q el suprem dels cubs a $M_{Q_{NC}}f(x)$, agafant $\widetilde{Q}$ com el mínim interval cúbic centrat a x que conté Q, tenim que $|\widetilde{Q}| \leq 2^n|Q|$. Així:

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \leq \frac{1}{|Q|} \int_{\widetilde{Q}} |f(y)| dy \leq \frac{2^n}{|\widetilde{Q}|} \int_{\widetilde{Q}} |f(y)| dy$$

obtenint la segona desigualtat. □

Observem que si definim l'operador maximal per boles no centrades a x i comparem amb l'operador per boles centrades arribem a una relació similar. Per tant, amb les relacions que hem vist aquí i a (4.1) veiem que els quatre operadors hereten les propietats d'acotació que esdevinguin d'una d'elles.

4.3 L'operador maximal definit a intervals oberts acotats

En la secció d'abans hem vist que passava si definíem l'operador maximal sobre intervals cúbics amb costats de la mateixa longitud. Aquí suposarem també intervals oberts acotats, però amb les longituds dels seus costats diferents. Hom es podria preguntar si realment conserven totes les propietats que s'han complert pels intervals cúbics. La resposta a això, però, és negativa.

Definició 4.3.1. Definim l'operador maximal associat a intervals oberts acotats com

$$M_R f(x) = \sup_{R \in \mathcal{B}_R(x)} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy$$

que és el suprem pels intervals oberts que contenen x de la forma $R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times ... \times [h_1, h_2]$; és a dir, els rectangles n-dimensionals que contenen x amb costats paral·lels als eixos.

Cal observar que si la dimensió és $n = 1$, aleshores l'operador maximal M_R és igual que l'operador maximal M_Q i, per tant, compleix que és $(1, 1)$-dèbil i (p, p)-fort per $p > 1$.

Proposició 4.3.2. *L'operador maximal associat a intervals oberts acotats M_R no és $(1, 1)$-dèbil, però sí és (p, p)-fort per $p > 1$ quan la dimensió és $n > 1$.*

Prova. Per veure que no és $(1, 1)$-dèbil només cal veure que si prenem f com la funció característica de l'esfera unitària, aleshores quan les coordenades tendeixen a infinit, l'ordre de l'operador maximal és de l'invers del producte de les longituds d'aquestes coordenades, de forma que no es compleix l'acotació dèbil per $p = 1$.

Per demostrar que és (p, p)-fort, cal fixar-se en què $M_R f \leq M_1 M_2 ... M_n f$, on M_i és l'operador unidimensional de la coordenada i-éssima. Aleshores, aplicant que aquests operadors unidimensionals sí estan fitats a L^p i aplicant el teorema de Fubini, tenim que M_R està fitat a $L^p(\mathbb{R}^n)$ □

Així doncs, hem vist que la base dels intervals oberts acotats no compleixen la cota $(1,1)$-dèbil. Això ens fa preguntar si hi hauria alguna desigualtat dèbil que ens serveixi per demostrar el Teorema de Diferenciació de Lebesgue en aquesta base. Aquesta desigualtat existeix i la demostrarem primer a $\mathbb{R}^2$ i veurem que es pot generalitzar fàcilment a $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.3.3. *Sigui $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ i $\lambda > 0$, aleshores tenim*

$$|\{x \in \mathbb{R}^2 : M_R f(x)\}| \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(y)|}{\lambda}\left(1 + \log^+ \frac{|f(y)|}{\lambda}\right) dy$$

on C no depèn ni de la funció f ni de λ.

Prova. Per demostrar aquest teorema, suposarem que no hi ha cap problema de mesurabilitat. Després donarem unes indicacions dels passos que hem de seguir per demostrar-los. Per la prova, utilitzarem $|P|_1$ per denotar la mesura 1-dimensional d'un conjunt $P \subset \mathbb{R}$ i $|Q|$ per denotar la mesura d'un conjunt $Q \subset \mathbb{R}^2$. També convé dir que utilitzarem les variables x, y per denotar la primera i segona coordenada de $\mathbb{R}^2$ i s i t per denotar les variables mudes dins les integrals.

Sigui $f \geq 0$ tal que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, definim

$$T_1 f(x,y) = \sup\left\{\frac{1}{|J|_1}\int_J f(s,y)ds : J \text{ interval de } \mathbb{R} \text{ tal que } x \in J\right\}$$

Ara, sigui $\lambda > 0$, definim el conjunt

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T_1 f(x,y) > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

Aleshores, definim per cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$T_2 f(x,y) = \sup\left\{\frac{1}{|H|_1}\int_H \chi_A(x,t) T_1 f(x,t)dt : H \text{ interval de } \mathbb{R} \text{ tal que } y \in H\right\}$$

Veurem que es compleix:

$$B = \left\{(x^1,x^2) \in \mathbb{R}^2 : M_R f(x^1,x^2) > \lambda\right\} \subset \left\{(x^1,x^2) \in \mathbb{R}^2 : T_2 f(x^1,x^2) > \frac{\lambda}{2}\right\} = D$$

Sigui $(x^1,x^2) \in B$, aleshores existeix un interval cúbic $I = J \times H$ dins $\mathbb{R}^2$ tal que $x^1 \in J$, $x^2 \in H$ i $\frac{1}{|I|}\int_I f > \lambda$. Dividirem I en dos conjunts C_1 i C_2 cada un essent la unió de segments de la mida de J paral·lels a l'eix Ox^1 de la següent manera: Si per cada $y \in H$ fixat tenim que tots els punts $(s,y) \in J \times \{y\}$ compleixen que $T_1 f(s,y) > \frac{\lambda}{2}$, posem $J \times \{y\} \subset C_1$. Si no, és a dir, si existeix $(s,y) \in J \times \{y\}$ tal que $T_2 f(s,y) \leq \frac{\lambda}{2}$, posem $J \times \{y\} \subset C_2$. Observem que en aquest cas, com el suprem ho compleix, tenim en particular

$$\frac{1}{|J|_1}\int_J f(s,y)ds \leq \frac{\lambda}{2} \implies \int_J f(s,y)ds \leq \frac{\lambda}{2}|J|_1$$

Per tant, integrant la desigualtat sobre el conjunt G dels $t \in H$ tals que $J \times \{t\} \subset C_2$, obtenim:

$$\int_{C_2} f(s,t)dsdt = \int_G \int_J f(s,t)dsdt \leq \frac{\lambda}{2}|J|_1|G|_1 = \frac{\lambda}{2}|C_2| \leq \frac{\lambda}{2}|I|$$

Com, a més:

$$\int_{C_1} f(s,t)dsdt + \int_{C_2} f(s,t)dsdt = \int_I f(s,t)dsdt > \lambda|I|$$

Tenim:

$$\int_{C_1} f(s,t)ds\ dt > \frac{\lambda}{2}|I|$$

Així, per les definicions de T_1 i T_2:

$$\begin{aligned} T_2 f(x^1,x^2) &\geq \frac{1}{|H|_1}\int_H \chi_A(x^1,t)T_1 f(x^1,t)\ dt \geq \frac{1}{|H|_1}\int_H \chi_A(x^1,t)\frac{1}{|J|_1}\int_J f(s,t)ds\ dt \\ &= \frac{1}{|I|}\int_H \chi_A(x^1,t)\int_J f(s,t)ds\ dt \geq \frac{1}{|I|}\int_{C_1} f(s,t)ds\ dt > \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

on l'última desigualtat és deguda al fet que si $(s,t)\in C_1$, aleshores $(x^1,t)\in A$, és a dir, els punts que no són de A, són de C_2. Per tant, hem vist que $B\subset D$. Ara veurem que D satisfà la desigualtat que hem dit.

Assumirem que $f\in L\log^+ L$, ja que sinó, no hi ha res a demostrar. Utilitzant la desigualtat $(1,1)$-dèbil per intervals unidimensionals, tenim que per quasi tot punt $x\in\mathbb{R}$ fixat,

$$\left|\left\{t\in\mathbb{R} : T_2 f(x,t) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|_1 \leq \frac{\tilde{c}}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x,t)T_1 f(x,t)dt$$

Així, integrant per tots els $x\in\mathbb{R}$ i utilitzant el lema (2.2.1), obtenim:

$$\begin{aligned} |D| &= \left|\left\{(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2 : T_2 f(x^1,x^2) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \tilde{c}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_A(x,y)T_1 f(x,y)}{\lambda/2}dx\ dy \\ &= \tilde{c}\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty \left|\left\{s\in\mathbb{R} : \frac{\chi_A(s,y)T_1 f(s,y)}{\lambda/2} > \rho\right\}\right|_1 d\rho\ dy = S_1 + S_2 \end{aligned}$$

on S_1 es defineix com $S_1 = \tilde{c}\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 \left|\left\{s\in\mathbb{R} : \frac{\chi_A(s,y)T_1 f(s,y)}{\lambda/2} > \rho\right\}\right|_1 d\rho\ dy$ i S_2 es defineix de la forma $S_2 = \tilde{c}\int_{\mathbb{R}}\int_1^\infty \left|\left\{s\in\mathbb{R} : \frac{\chi_A(s,y)T_1 f(s,y)}{\lambda/2} > \rho\right\}\right|_1 d\rho\ dy$.

Si $(x,y)\in A$, aleshores $T_1 f(x,y) > \lambda/2$ i si $0<\rho\leq 1$, tenim:

$$\left|\left\{z\in\mathbb{R} : \frac{\chi_A(z,y)T_1 f(z,y)}{\lambda/2} > \rho\right\}\right|_1 = \left|\left\{z\in\mathbb{R} : T_1 f(z,y) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|_1$$

Així, utilitzant la desigualtat $(1,1)$-dèbil dels intervals unidimensionals, tenim:

$$S_1 = \tilde{c}\int_{\mathbb{R}}\left|\left\{s\in\mathbb{R} : T_1 f(s,y) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|_1 dy \leq \tilde{c}\int_{\mathbb{R}}\overline{c}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x,y)}{\lambda}dx\ dy = C\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x,y)}{\lambda}dx\ dy$$

on C és una constant.

Per estimar el conjunt S_2, per cada element fixat $\rho>0$, definim:

$$g_*(x,y,\rho) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } f(x,y)\leq \frac{\lambda\rho}{4} \\ 0 & \text{a } f(x,y) > \frac{\lambda\rho}{4} \end{cases}$$

i $g^*(x,y,\rho)$ tal que $f(x,y) = g_*(x,y,\rho) + g^*(x,y,\rho)$. Està clar que $T_1 f \leq T_1 g_* + T_1 g^*$ i que $T_1 g_* \leq \frac{\lambda\rho}{4}$. Per tant, utilitzant un altre cop la desigualtat $(1,1)$-dèbil, tenim:

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \tilde{c}\int_{\mathbb{R}}\int_1^\infty \left|\left\{s\in\mathbb{R} : T_1 g^*(s,y) > \frac{\lambda\rho}{4}\right\}\right| d\rho\ dy \leq \tilde{c}\int_{\mathbb{R}}\int_1^\infty\int_{\mathbb{R}} \frac{g^*(x,y)}{\lambda\rho/4}dx\ d\rho\ dy \\ &= \tilde{c}\int_{\mathbb{R}}\int_1^\infty\int_{\left\{x\in\mathbb{R}: \frac{4f(x,y)}{\lambda}>\rho\right\}} \frac{f(x,y)}{\lambda\rho/4}dx\ d\rho\ dy = \tilde{c}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_1^{\frac{4f(x,y)}{\lambda}} \frac{4f(x,y)}{\lambda\rho}d\rho\ dx\ dy \\ &= C\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x,y)}{\lambda}\log^+\frac{4f(x,y)}{\lambda}dx\ dy \end{aligned}$$

ja que si $\frac{4f(x,y)}{\lambda} < 1$, aleshores es tendria $g^*(x,y) = 0$.

Així, sumant S_1 i S_2 obtenim:

$$|D| \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{f}{\lambda}\right)$$

I per tant, hem demostrat el teorema. □

Observació: Per tractar els possibles problemes que poden haver sorgit al teorema anterior respecte a la mesurabilitat dels conjunts i funcions, s'haurien de seguir els següents passos:

1) Provar-ho per funcions que siguin de la forma $f(x,y) = \sum_{n=1}^{N} a_k \chi_{A_k(x,y)}$ on els coeficients són positius i A_k és el producte de dos intervals oberts i fitats de $\mathbb{R}$.

2) Provar-ho per combinacions lineals de coeficients positius de funcions característiques de conjunts oberts i fitats disjunts.

3) Provar-ho per combinacions lineals no negatives de conjunts compactes disjunts.

4) Per funcions localment integrables positives.

5) Per funcions localment integrables.

Per una demostració més detallada d'aquests passos, es pot trobar més informació a l'article [7]

Com hem dit abans, aquest resultat es pot generalitzar a $\mathbb{R}^n$ de la següent forma:

Teorema 4.3.4. *Si definim M^s com l'operador maximal associat a intervals oberts acotats tals que s costats tenen la mateixa longitud i $n-s$ costats tenen longitud arbitrària, aleshores per $\lambda > 0$ i $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tenim:*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M^s f(x) > \lambda\}| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{f(y)}{\lambda}\right)^{n-s} dy$$

Observem que quan la dimensió és $n = 2$ i els costats són diferents ($s = 1$), obtenim el mateix resultat que en teorema anterior i que quan $s = n$, és a dir, quan són cubs, recuperem l'acotació $(1,1)$-dèbil que hem vist a la secció anterior.

Cal fer notar que l'espai $L(1 + \log^+ L)^{n-s}$, l'espai de les funcions mesurables f tals que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(1 + \log^+ f)^{n-s} < \infty$$

és també un espai de Banach, ja que es un dels espais d'Orlicz, com es pot veure a [11].

Utilitzant aquest teorema que acabem de veure i seguint la mateixa demostració que a [3.2], obtenim una versió del Teorema de Diferenciació de Lebesgue per rectangles n-dimensionals amb costats paral·lels als eixos.

Corol·lari 4.3.5 (Teorema de Diferenciació de Lebesgue per intervals acotats)**.**
Sigui $f \in L(1 + \log^+ L)^{n-s}(\mathbb{R}^n)$, aleshores:

$$\lim_{\delta(B)\to 0} \frac{1}{|B|} \int_B f(y) - f(x) dy = 0 \text{ per quasi tot } x \in \mathbb{R}^n$$

on B són els intervals oberts acotats amb s costats iguals i $n-s$ costats arbitraris.

4.4 L'operador maximal definit a paral·lelepípedes arbitraris

En les seccions anteriors hem vist els casos en els quals els paral·lelepípedes eren paral·lels als eixos. Primer hem vist que els intervals cúbics complien les desigualtats $(1,1)$-dèbil i (p,p)-forta i després que els intervals oberts ja no complien la desigualtat $(1,1)$-dèbil. Aquí veurem que considerant rectangles arbitràriament girats, perdem també la fitació (p,p)-forta. Donarem una idea seguint els passos de [5].

Definició 4.4.1. Definim l'operador maximal definit a paral·lelepípedes qualssevol com

$$M_P f(x) = \sup_{P \in \mathcal{B}_P(x)} \frac{1}{|P|} \int_P |f(y)| dy$$

on P és un paral·lelepípede n-dimensional amb una orientació qualsevol que conté el punt x.

Per la següent proposició només donarem una idea de la prova que s'ha de seguir per demostrar que no compleix ni la fita $(1,1)$-dèbil ni la (p,p)-forta. Els detalls d'aquesta demostració es poden trobar a [8] i a [5].

Proposició 4.4.2. *L'operador maximal M_P no és ni $(1,1)$-dèbil ni (p,p)-fort per $1 < p < \infty$ quan la dimensió és $n > 1$.*

Idea de la prova. A la secció anterior, hem vist que l'operador maximal associat a intervals oberts a $\mathbb{R}^n$ no és $(1,1)$-dèbil. Com l'operador maximal M_P és més general i conté l'anterior, es dedueix que no compleix la cota $(1,1)$-dèbil.

Per veure que no és (p,p)-fort, ho separarem en dos casos. Comencem veient per $p \leq n$. Si agafem la funció característica de la bola unitària, en fer tendir x a l'infinit, tenim que $M_P f(x)$ tendeix com $1/|x|$ i, per tant, com $p \leq n$, $M_P f$ no és integrable a L^p.

Per veure un contraexemple en el qual si $p > n$, la funció maximal no està acotada a L^p, hem d'utilitzar un teorema de Besicovitch, del qual tenim la demostració i els detalls de la seva construcció a [8] que diu que per tot $\epsilon > 0$ existeix un conjunt E tal que $|E| < \epsilon$ i un conjunt F amb $|F| > 1$ tal que per tot $x \in F$, $M_P(\chi_E)(x) > 1/2$. □

Des del punt de vista de la teoria de la diferenciació, aproximar un punt a partir de rectangles arbitràriament girats a $\mathbb{R}^n$ donaria una resposta negativa a si es compleix el Teorema de Diferenciació de Lebesgue.

4.5 L'operador maximal definits a cubs diàdics

En aquesta secció definirem l'operador maximal diàdic i veurem la descomposició de Calderon-Zygmund, que ja hem utilitzat anteriorment.

Definició 4.5.1. Dividint l'espai $\mathbb{R}^n$ de forma que per cada $k \in \mathbb{Z}$, obtenim la família $\mathcal{Q}_k$ de cubs oberts per la dreta amb vèrtexs al reticle $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$ i anomenem "cubs diàdics" a tots els cubs de $\bigcup_k \mathcal{Q}_k$.

És fàcil veure que compleixen aquestes propietats:

i) Cada $x \in \mathbb{R}^n$ està en un únic cub de cada família $\mathcal{Q}_k$.

ii) Dos cubs diàdics o bé són disjunts o un està contingut dins l'altre.

iii) Un cub diàdic de la família $\mathcal{Q}_k$ està contingut dins d'un únic cub de cada família $\mathcal{Q}_j$ amb $j < k$ i, a més, conté 2^n cubs diàdics de la família $\mathcal{Q}_{k+1}$.

Definició 4.5.2. Donada una funció $f \in L^1_{loc}$, definim:

$$E_k f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy \right) \chi_Q(x)$$

que és l'esperança condicional de f respecte a la σ-àlgebra engendrada per $\mathcal{Q}_k$. D'aquí, definim la funció maximal diàdica com:

$$M_d f(x) = \sup_k |E_k f(x)|$$

Es pot veure que si Ω és la unió de cubs d'una família $\mathcal{Q}_k$, aleshores:

$$\int_\Omega E_k f(x)dx = \int_\Omega f(x)dx$$

Prova.

$$\int_\Omega E_k f(x)dx = \int_\Omega \left(\sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy \right) \chi_Q(x)dx = \int_Q \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)dy\ dx$$
$$= \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \int_Q f(y)dy = \int_\Omega f(x)dx$$

□

Ara veurem que també satisfà l'acotació dèbil:

Proposició 4.5.3.

i) *L'operador M_d és $(1,1)$-dèbil.*

ii) $\lim_{k \to \infty} E_k f(x) = f(x)$ *per quasi tot punt i per a tota funció* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Prova. Sense perdre generalitat, podem suposar que la funció que avaluem és no negativa (sinó, descomponem en una part positiva i una altra negativa). Aleshores, podem posar $\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\} = \cup_k \Omega_k$ definint els conjunts

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : E_k f(x) > \lambda \text{ i } E_j f(x) \leq \lambda \text{ per } j < k\}$$

Així, es veu fàcilment que els conjunts Ω_k són disjunts, així que es poden escriure com la unió de cubs $\mathcal{Q}_k$. Per tant, utilitzant la propietat d'abans, tenim:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| = \sum_k |\Omega_k| \leq \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_k} E_k f(y)dy = \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{\Omega_k} f(y)dy \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$$

Per tant, hem demostrat i). Vegem que es compleix ii). Si la funció f és continua, aleshores és cert per $f \in L^1$ gràcies al Teorema 2.1.3. A més, com es té

$$E_k f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_0} E_k(f\chi_Q)(x)\chi_Q(x)\ ,\ k \geq 0$$

i $f\chi_Q \in L^1$ per $f \in L^1_{loc}$, aleshores es compleix en quasi tot $x \in Q$ per a tot $Q \in \mathcal{Q}_0$, amb la qual cosa es compleix per quasi tot punt $x \in \mathbb{R}^n$. □

En el procés de demostració anterior hem vist una descomposició de l'espai $\mathbb{R}^n$ que és molt útil. Aquesta descomposició és l'anomenada "Descomposició de Calderón-Zygmund".

Teorema 4.5.4. *Sigui f una funció integrable no negativa i $\lambda > 0$. Aleshores existeix una successió de cubs diàdics $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tals que:*

i) $f(x) \leq \lambda$ *en quasi tot* $x \notin \bigcup_j Q_j$

ii) $|\bigcup_j Q_j| \leq \frac{1}{\lambda}||f||_1$

iii) $\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f \leq 2^n\lambda$

Prova. Definint els conjunts Ω_k com abans i fent la descomposició en cubs de $\mathcal{Q}_k$, obtenim una família $\{Q_j\}$ de cubs diàdics disjunts com a l'enunciat. Aleshores la propietat ii) és conseqüència immediata de la desigualtat $(1,1)$-dèbil que hem demostrat a la proposició 4.5.3.

Si $x \notin \cup_j Q_j$, per construcció dels conjunts Ω_k, $E_j f(x) \leq \lambda$ per a tot j i utilitzant la segona propietat del teorema anterior, $f(x) \leq \lambda$ per quasi tots aquests punts.

La primera desigualtat de iii) és evident, ja que és la primera condició a l'hora de construir els Ω_k. Per demostrar la segona, vegem que el cub diàdic $\tilde{Q}_j$ de costat doble que conté Q_j compleix la segona condició i per tant:

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f \leq \frac{|\tilde{Q}_j|}{|Q_j|} \cdot \frac{1}{|\tilde{Q}_j|}\int_{\tilde{Q}_j} f \leq 2^n\lambda$$

□

Per acabar aquesta secció, veurem un lema que ens relaciona l'operador maximal definit per intervals cúbics i cubs diàdics.

Lema 4.5.5.

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_Q f(x) > 4^n\lambda\}| \leq 2^n|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}|$$

Prova. Fent la descomposició de la mateixa manera que abans del conjunt $\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_j Q_j$. Sigui $2Q_j$ el cub de mateix centre i radi doble que Q_j, només falta demostrar que $\{x \in \mathbb{R}^n : M_Q f(x) > 4^n\lambda\} \subseteq \bigcup_j 2Q_j$, ja que aleshores:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_Q f(x) > 4^n\lambda\}| \leq \sum_j |2Q_j| \leq 2^n \sum_j |Q_j| = 2^n|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}|$$

Sigui $x \notin 2Q_j$ i $\tilde{Q}$ un cub qualsevol que tingui centre x. Aquest cub talla com a molt amb 2^n cubs diàdics de la família Q_k, on k és l'únic enter que compleix que $2^{k-1} \leq \text{costat}(\tilde{Q}) < 2^k$, és a dir, talla amb $R_1, ..., R_m$ amb $m \leq 2^n$. Cap d'aquests R_i ni els cubs diàdics que els contenen estàn entre els Q_j de la descomposició anterior, ja que del contrari $x \in \cup_j 2Q_j$, amb la qual cosa la mitjana de f sobre cada R_i és menor o igual a λ. Per tant:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f \leq \sum_{i=1}^m \frac{1}{|Q|}\int_{Q\cap R_i} f \leq \sum_{i=1}^m \frac{2^{kn}}{|Q|} \cdot \frac{1}{|R_i|}\int_{R_i} f \leq 2^n m\lambda \leq 4^n\lambda$$

□

Observem que aquest lema que acabem de veure ens donaria una manera alternativa de demostrar que l'operador associat a cubs M_Q és $(1,1)$-dèbil i (p,p)-fort, però aquest cop a partir d'un altre operador maximal, el del cubs diàdics.

Per altra banda, cal fer notar que l'operador maximal diàdic M_d compleix la següent versió del Teorema de Diferenciació de Lebesgue:

Teorema 4.5.6 (Teorema de diferenciació de Lebesgue per cubs diàdics)**.** Sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, aleshores:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(y)dy = f(x)$$

on cada Q_k és un element de cada família $\mathcal{Q}_k$.

Prova. Per demostar-ho, només cal combinar el teorema 4.5.3 amb el teorema 2.1.3. □

Capítol 5

Propietats de diferenciació d'una base

En aquest capítol parlarem sobre les relacions que hi ha entre bases de diferenciació i el seu operador maximal associat. En tots els resultats d'aquest capítol, la base $\mathcal{B}$ serà sempre una base Busemann-Feller (una base B-F).

5.1 Bases de diferenciació i de densitat

Definició 5.1.1. Sigui $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definim per cada $x \in \mathbb{R}^n$ la derivada superior respecte d'una base $\mathcal{B}$ a:

$$\overline{D}\left(\int f, x\right) = \sup\left\{\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{|B_k|}\int_{B_k} f : \{B_k\} \subset \mathcal{B}(x) \text{ t.q. } B_k \to x\right\}$$

i la derivada inferior com:

$$\underline{D}\left(\int f, x\right) = \inf\left\{\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{|B_k|}\int_{B_k} f : \{B_k\} \subset \mathcal{B}(x) \text{ t.q. } B_k \to x\right\}$$

Direm que una base $\mathcal{B}$ diferència una funció f si la derivada superior i la inferior coincideixen i són iguals a $f(x)$ per quasi tot $x \in \mathbb{R}^n$, en aquest cas la denotarem amb D, és a dir:

$$D\left(\int f, x\right) = \overline{D}\left(\int f, x\right) = \underline{D}\left(\int f, x\right) = f(x)$$

Si $\mathcal{B}$ diferencia totes les funcions f d'un cert espai $\mathcal{X}$, direm que $\mathcal{B}$ diferencia $\mathcal{X}$.

Proposició 5.1.2. *Sigui $\mathcal{B}$ una base B-F i $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, aleshores $\overline{D}$ i $\underline{D}$ són mesurables.*

Prova. Només cal demostrar-ho per $\overline{D}(\int f, x)$, ja que $\underline{D}\left(\int f, x\right) = -\overline{D}\left(\int(-f), x\right)$.

Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ fixat, definim el conjunt

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}\left(\int f, x\right) > \lambda\right\} = \bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcap_{s=1}^{\infty} A_{rs}$$

on A_{rs} està definit per cada valor de r i s de la forma:

$$A_{rs} = \left\{B \in \mathcal{B}(x) : \delta(B) < \frac{1}{s}\ ,\ \frac{1}{|B|}\int_B f \geq \lambda + \frac{1}{r}\right\}$$

Com tots els conjunts $B \in \mathcal{B}(x)$ són oberts, també és obert el conjunt A_{rs}. Per tant, com la unió numerable i la intersecció numerable de conjunts mesurables és mesurable, obtenim que $\overline{D}(\int f, x)$ és mesurable. $\square$

Definició 5.1.3. Direm que una base $\mathcal{B}$ que sigui base B-F satisfà la propietat de densitat o que és una base de densitat si per tot conjunt mesurable A, tenim $D(\int \chi_A, x) = \chi_A(x)$ per quasi tot punt $x \in \mathbb{R}^n$. Això és equivalent a dir que si $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ és una successió de $\mathcal{B}(x)$ que és contrau a x, aleshores:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|A \cap B_k|}{|B_k|} = \chi_A(x) \tag{5.1}$$

per quasi tot punt $x \in \mathbb{R}^n$.

Un exemple de base de densitat que hem vist és la base $\mathcal{B}_B$ de les boles euclidianes centrades a un punt x i un exemple de base que no sigui base de densitat és la base de tots els rectangles de $\mathbb{R}^2$ centrats en el punt x.

Cal fer notar que existeixen bases de densitat que compleixen (5.1) però que no són bases de diferenciació. Un exemple el podem trobar al capítol VI del llibre [8].

A continuació veurem un parell de teoremes que caracteritzen les bases de densitat. Aquests teoremes els van enunciar i demostrar Guzman i Weller l'any 1934 i es pot trobar la seva demostració original a [9].

Teorema 5.1.4. *Sigui $\mathcal{B}$ una base B-F. Aleshores són equivalents les següents propietats:*

a) $\mathcal{B}$ és una base de densitat

b) Per cada λ tal que $0 < \lambda < 1$, per cada successió no creixent $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de conjunts fitats mesurables tals que $|A_k| \to 0$ i per cada successió no creixent $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres reals que tendeixen a 0, si definim:

$$\begin{aligned} M_k\chi_h(x) &= \sup\left\{\frac{1}{|B|}\int_B \chi_h : \delta(B) < r_k, B \in \mathcal{B}(x)\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{|A_h \cap B|}{|B|} : \delta(B) < r_k, B \in \mathcal{B}(x)\right\} \end{aligned}$$

per cada k i h i on $\chi_k = \chi_{A_h}$, aleshores tenim:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_k\chi_k(x) > \lambda\}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Prova. Primer provarem que a) implica b). Siguin λ i $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com a b). Fixem un conjunt A_h. Aleshores per quasi tot punt $x \notin A_h$ tenim per a) que $D(\int \chi_h, x) = 0$. Així, per k suficientment gran, tenim $M_k\chi_h(x) \leq \lambda$. Per tant:

$$\lim_{k\to\infty} |\{M_k\chi_h > \lambda\}| = \lim_{k\to\infty} |\{x \in A_h : M_k\chi_h(x) > \lambda\}| \leq |A_h|$$

A més, per la definició de $M_k\chi_h$, tenim que per $k \geq h$, $\{M_k\chi_k > \lambda\} \subset \{M_k\chi_h > \lambda\}$. De manera que

$$\lim_{k\to\infty} |\{M_k\chi_k > \lambda\}| \leq |A_h|$$

Per tant, com $|A_k| \to 0$, obtenim b).

Per demostrar que b) implica a) farem servir la reducció al absurd. Suposem que $\mathcal{B}$ no és una base de densitat. Aleshores existeix un conjunt mesurable A tal que $|A| > 0$ que compleix:

$$\left|\left\{x \notin A : \overline{D}\left(\int \chi_A, x\right) > 0\right\}\right| > 0$$

Això últim es demostra també per reducció a l'absurd: Suposem que per tot P conjunt mesurable tal que $|P| > 0$ tenim que per quasi tot $x \notin P$, $\overline{D}(\int \chi_P, x) = 0 = \underline{D}(\int \chi_P, x)$. Aplicant això al complementari de P, P', tenim:

$$\overline{D}\left(\int \chi_{P'}, x\right) = 0 = \underline{D}\left(\int \chi_{P'}, x\right)$$

Ara, observem que es compleix:

$$\overline{D}\left(\int \chi_{P'}, x\right) = 1 - \underline{D}\left(\int \chi_{P}, x\right)$$

$$\underline{D}\left(\int \chi_{P'}, x\right) = 1 - \overline{D}\left(\int \chi_{P}, x\right)$$

Amb el que obtindriem que per tot $x \in P$:

$$\overline{D}\left(\int \chi_{P}, x\right) = 1 = \underline{D}\left(\int \chi_{P}, x\right)$$

la qual cosa voldria dir que $\mathcal{B}$ seria una base de densitat, amb el que hauríem arribat a una contradicció.

Tornem a prendre A amb $|A| > 0$ tal que

$$\left|\left\{x \notin A : \overline{D}\left(\int \chi_A, x\right) > 0\right\}\right| > 0$$

Aleshores podem agafar un conjunt mesurable $B \subset A^c$ amb $|B| > 0$ tal que per cada $x \in B$, tenim que $\overline{D}(\int \chi_A, x) > \lambda$. Sigui $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successió no creixent de conjunts oberts tals que $B \subset G_k$ amb $|G_k \setminus B| \to 0$ i sigui $A_k = G_k \cap A$, aleshores $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ és no creixent i $|A_k| \to 0$, ja que $A_k \subset G_k \setminus B$.

Prenent qualsevol successió de valors reals $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que tendeix a 0, hem de veure que $B \subset \{M_k\chi_k > \lambda\}$ per cada k, ja que aleshores, com $|B| > 0$, $|\{M_k\chi_k > \lambda\}| > 0$, tindrem que contradiu b), com volíem demostrar.

Sigui $x \in B$ i sigui k fixat. Com $\overline{D}(\int \chi_A, x) > \lambda$, per definició existeix una successió $\{R_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(x)$ tal que $R_h \to x$ amb $R_h \subset G_k$ tal que

$$\frac{|R_h \cap A|}{|R_h|} > \lambda$$

Així

$$\frac{|R_h \cap A_k|}{|R_h|} > \lambda$$

obtenint $M_k\chi_k > \lambda$. □

Abans de demostrar el següent teorema, cal fer algunes definicions sobre bases invariants per homotècies i translacions.

Definició 5.1.5. Direm que una base $\mathcal{B}$ és invariant per homotècies si per cada element $R \in \mathcal{B}$ i per tota homotècia $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tenim que $H(R) \in \mathcal{B}$.

Direm que una base $\mathcal{B}$ és invariant per translacions si per cada element $R \in \mathcal{B}$ i per tota translació $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tenim que $T(R) \in \mathcal{B}$.

Si tenim una base $\mathcal{B}$ que és B-F invariant per homotècies, el teorema anterior té una forma més senzilla, com veurem al següent teorema.

Teorema 5.1.6. *Sigui $\mathcal{B}$ una base B-F que és invariant per homotècies. Aleshores les següents propietats són equivalents:*

a) $\mathcal{B}$ és una base de densitat.

b) Per cada λ tal que $0 < \lambda < 1$, existeix una constant positiva que depend d'aquest λ, $c(\lambda)$ tal que per qualsevol conjunt mesurable finit A, es compleix:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M\chi_A(x) > \lambda\}| \leq c(\lambda)|A|$$

Demostrar que b) implica a) és conseqüència del teorema anterior. Per veure l'altra implicació utilitzarem aquest lema:

Lema 5.1.7. *Sigui G un conjunt obert fitat a $\mathbb{R}^n$ i sigui K un conjunt compacte tal que $|K| > 0$. Sigui $r > 0$, aleshores existeix una successió disjunta $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjunts que són homotècies de K continguts a G tals que $|G \setminus \cup_{n=1}^{\infty} K_n| = 0$ amb $\delta(K_n) < r$.*

Prova. Sigui A un interval cúbic semiobert tal que $K \subset int(A)$, on $int(A)$ denota l'interior de A, i sigui $\alpha|A| = |K|$ amb $0 < \alpha < 1$. Particionem G en una successió d'intervals oberts cúbics semioberts disjunts $\{A_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ amb diàmetres més petits que r.

Per cada A_h, sigui P_h l'homotècia que porta A a A_h i sigui $K_h^* = P_h K$, aleshores podem agafar una successió $\{K_h^*\}_{h=1}^{N_1}$ tal que si

$$G_1 = G \setminus \bigcup_{h=1}^{N_1} K_h^*$$

aleshores G_1 és obert i compleix:

$$\begin{aligned} |G_1| &= \left| \bigcup_{h=1}^{\infty} A_h \setminus \bigcup_{h=1}^{N_1} K_h^* \right| = \left| \bigcup_{h=1}^{N_1} (A_h \setminus K_h^*) \right| + \left| \bigcup_{h>N_1} A_h \right| = (1-\alpha) \left| \bigcup_{h=1}^{N_1} A_h \right| + \left| \bigcup_{h>N_1} A_h \right| \\ &< \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)|G| \end{aligned}$$

si prenem N_1 lo suficientment gran. Així, si agafem com a $K_n = K_h$ si $h = 1, ..., N_1$ i fent el mateix procediment que acabem de fer per G però ara per G_1, obtindrem una successió $\{K_h\}_{h=N_1+1}^{N_2}$ tal que:

$$|G_2| = \left| G_1 \setminus \bigcup_{h=N_1+1}^{N_2} K_h \right| \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)|G_1| < \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 |G|$$

Si seguim fent aquest procediment, obtindrem la successió $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que volíem. □

Prova (Teorema 5.1.6).
Demostrarem l'altra implicació per reducció a l'absurd. Suposem que no passa b). Aleshores existeix un $\lambda > 0$ tal que per tota constant $c > 0$, existeix un conjunt mesurable A_c amb

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M\chi_{A_c}(x) > \lambda\}| > c|A_c|$$

En particular, escollint $c = 2^{k+1}$, existeix per cada $k > 0$ un conjunt A_k tal que, si definim $\chi_k = A_k$, tenim:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M\chi_k(x) > \lambda\}| > 2^{k+1}|A_k|$$

Més concretament, existeix un nombre positiu r_k tal que, definint $M_k = M_{r_k}$:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_k\chi_k(x) > \lambda\}| > 2^{k+1}|A_k|$$

Sigui ara C_k un conjunt compacte de $\{x \in \mathbb{R}^n : M_k\chi_k(x) > \lambda\}$ tal que $|C_k| > 2^{k+1}|A_k|$. Si apliquem el lema anterior al cub unitari obert Q utilitzant el compacte C_k, aleshores podem recobrir el cub quasi completament per una successió disjunta $\{C_k^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de conjunts que són homotècies de C_k tals que si α_{kj} és el rati de l'homotècia que transforma C_k en C_k^j, aleshores tenim per cada j, k: $\alpha_{kj}r_k < 2^{-k}$. Sigui ara A_k^j l'homotècia aplicada al conjunt A_k i sigui $A = \bigcup\limits_{k,j} A_k^j$. Aleshores tenim:

$$|A| \leq \sum_{k,j} |A_k^j| < \sum_{k,j} 2^{-(k+1)}|C_k^j| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k+1)} \sum_{j=1}^{\infty} |C_k^j| = \frac{1}{2}$$

Ara, si veiem que per quasi tot element $x \in Q$, tenim $\overline{D}(\int \chi_A, x) \geq \lambda > 0$, com $|A| < 1/2$ haurem provat que A no compleix la propietat de densitat i, per tant, no es compleix a).

Fixem $k > 0$ i sigui $x \in C_k$. Com C_k és subconjunt de $\{x \in \mathbb{R}^n : M_k\chi_k(x) > \lambda\}$, aleshores existeix un element $R \in \mathcal{B}$ amb diàmetre $\delta(R) < r_k$ tal que

$$\frac{|R \cap A_k|}{|R|} > \lambda$$

Per cada j, sigui R^* l'homotècia aplicada a R, aleshores el seu diàmetre és menor que 2^{-k} i

$$\frac{|R^* \cap A|}{|R^*|} > \lambda$$

Com per cada k fixat, quasi tot punt de Q pertany a algun C_k^j, aleshores per quasi tot punt de Q existeix una successió $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que es contrau a x tal que

$$\frac{|R_k \cap A|}{|R_k|} > \lambda$$

Per tant, $\overline{D}(\chi_A, x) \geq \lambda$ per qusi tot punt de Q. □

Aquest teorema que acabem de provar ens permet provar que la base dels intervals cúbics de $\mathbb{R}^n$ és una base de densitat, ja que compleix la fitació $(1,1)$-dèbil i també que la base dels intervals rectangulars de $\mathbb{R}^n$ (rectangles amb els costats paral·lels als eixos) és una base de densitat aplicant aquest teorema i el teorema 4.3.4, ja que:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M^s(\chi_A)(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\left(1 + \log^+ \frac{1}{\lambda}\right)^{n-s} |A| = c(\lambda)|A|$$

Per la demostració que tota base de densitat diferencia L^∞, utilitzarem un teorema clàssic anomenat el Teorema de Lusin, el qual es troba amb més detall a l'apèndix d'aquest treball. Aquest teorema el van enunciar i demostrar originàriament Guzman i Weller a l'article [9].

Teorema 5.1.8. *Sigui $\mathcal{B}$ una base de densitat. Aleshores $\mathcal{B}$ diferencia L^∞.*

Prova. Com la propietat de diferenciació de $\int f$ és local, sense perdre de generalitat podem suposar que f té suport compacte A i que està fitada per una constant H, és a dir, $0 \leq f(x) \leq H < \infty$. Així, aplicant el teorema de Lusin a aquest conjunt A i a aquesta funció f tenim que existeix un compacte $K \subset A$ tal que $|A \setminus K| < \epsilon$ i que f és continua a K. A partir d'ahi, definim $F_K = f\chi_K$ i $F_{A\setminus K} = f\chi_{A\setminus K}$.

Comencem demostrant que $D(\int F_K, x) = F_K(x)$ per quasi tot $x \in \mathbb{R}^n$. Sigui $R_k \in \mathcal{B}(x)$ que es contrau cap a x quan k tendeix a l'infinit, tenim:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|R_k|}\int_{R_k} F_K(y)dy - F_K(x) \leq \frac{1}{|R_k|}\int_{R_k} |F_K(y)dy - F_K(x)|dy\right. \\ &= \frac{1}{|R_k|}\int_{R_k\cap K} |F_K(y)dy - F_K(x)|dy + \frac{1}{|R_k|}\int_{R_k\setminus K} |F_K(y)dy - F_K(x)|dy \\ &\leq \frac{1}{|R_k|}\int_{R_k\cap K} |F_K(y)dy - F_K(x)|dy + H\frac{|R_k \setminus K|}{|R_k|}\end{aligned}$$

Així, si $x \in K$, el primer component tendeix a 0, ja que quan $y \to x$, tenim $F_K(y) \to F_K(x)$ per la continuïtat de f i el segon component tendeix a 0 quan $k \to \infty$. I si $x \notin K$, aleshores $F_K(x) = 0$ i només queda el primer terme, que és més petit que $H\frac{|R_k\cap K|}{|K|}$. Així, utilitzant la propietat de densitat de la base, tenim que tendeix a 0 a quasi tots els punts, per tant $D(\int F_K, x) = F_K(x)$ a quasi tot punt $x \in \mathbb{R}^n$.

Ara, per un $\lambda > 0$ arbitrari, tenim:

$$\begin{aligned}\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\overline{D}\left(\int f, x\right) - f(x)\right| > \lambda\right\}\right| &= \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\overline{D}\left(\int F_{A\setminus K}, x\right) - F_{A\setminus K}(x)\right| > \lambda\right\}\right| \\ &\leq |A \setminus K| + \left|\left\{x \in K : \left|\overline{D}\left(\int F_{A\setminus K}, x\right)\right| > \lambda\right\}\right|\end{aligned}$$

on a l'última desigualtat hem separat per $A \setminus K$ i K, fitant el primer component per $|A \setminus K|$ i utilitzant que $F_{A\setminus K}(x) = 0$ si $x \in K$. Ara, segons el teorema de Lusin que hem vist, $|A \setminus K| < \epsilon$ i per la segona component, tenim que per quasi tot punt $x \in K$ i tota successió $R_k \in \mathcal{B}(x)$ que es contrau a x es compleix:

$$\frac{1}{|R_k|}\int_{R_k} F_{A\setminus K}(y)dy \leq H\frac{|R_k \cap (A \setminus K)|}{|R_k|} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Així, $\overline{D}(\int f, x) = f(x)$ per quasi tot $x \in \mathbb{R}^n$. De forma anàloga, podem demostrar també que $\underline{D}(\int f, x) = f(x)$ per quasi tot $x \in \mathbb{R}^n$, amb el que hem demostrat la diferenciabilitat a L^∞. □

Al teorema 5.1.6 hem vist una caracterització per bases de densitat utilitzant bases que són invariants per homotècies. Així doncs, caldria preguntar-se si podríem obtenir un resultat similar quan la base és invariant per translacions. En el següent capítol veurem que aquestes bases són bases de densitat si, i només si, existeix $r > 0$ tal que per tot λ entre 0 i 1, existeix una constant $c(\lambda)$ tal que per tot conjunt A mesurable i fitat, tenim:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_r\chi_A(x)\}| \leq c(\lambda)|A|$$

on M_r denota l'operador maximal associat a les bases de conjunts de $\mathcal{B}$ que tenen diàmetre més petit que r.

5.2 Propietats individuals de diferenciació

En aquesta secció veurem que si una base de densitat $\mathcal{B}$ diferencia una funció $f \in L^1$, aleshores l'operador maximal associat compleix una certa propietat dèbil.

Abans d'això, però, veurem abans que qualsevol funció mesurable que estigui acotada superiorment per una funció amb la propietat de diferenciació de la base, hereta també aquesta propietat de diferenciació. Aquest últim teorema el van demostrar Hayes i Pauc a [10], encara que aquí donarem una versió més senzilla de la demostració.

Proposició 5.2.1. *Sigui $\mathcal{B}$ una base de densitat que diferencia $\int f$ on $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f \geq 0$ i sigui g una funció qualsevol mesurable tal que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$. Aleshores la base $\mathcal{B}$ diferencia també $\int g$.*

Prova. Per cada $N > 0$ fixat, separem $f(x)$ en $f(x) = f^*(x) + f_*(x)$ per cada x, on:

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad f(x) < N \\ \\ 0 & si \quad f(x) \geq N \end{cases}$$

Per hipòtesi, $D(\int f, x) = f(x)$ per quasi tot punt $x \in \mathbb{R}^n$ i com és base de densitat, diferencia L^∞ com hem vist al teorema 5.1.8. Així, $D(\int f_*, x) = f_*(x)$ per quasi tot punt $x \in \mathbb{R}^n$. Per tant, tenim que per quasi tot punt a $\mathbb{R}^n$, $D(\int f^*, x) = f^*(x)$ també.

Ara, separem $g(x)$ de igual forma, és a dir, $g(x) = g^*(x) + g_*(x)$ per quasi tot punt $x \in \mathbb{R}^n$ on:

$$g_*(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad f(x) < N \\ \\ 0 & si \quad f(x) \geq N \end{cases}$$

Així, com $|g(x)| < f(x) < N$, aplicant un altre cop el teorema 5.1.8 tenim $D(\int g_*, x) = g_*(x)$ per quasi tot punt. Com $|g^*| < f^*$ i f^* és diferenciable, aleshores per quasi tot punt x existeix una successió $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(x)$ que es contrau a x tal que:

$$\left| \frac{1}{|R_k(x)|} \int_{R_k(x)} g^*(y)dy \right| \leq \frac{1}{|R_k(x)|} \int_{R_k(x)} f^*(y)dy$$

Així, per cada $\alpha > 0$, tenim:

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x : \left| \overline{D} \left(\int g, x \right) - g(x) \right| > \alpha \right\} \right| &\leq \left| \left\{ x : \left| \overline{D} \left(\int g^*, x \right) - g^*(x) \right| > \alpha \right\} \right| \\ &\leq \left| \left\{ x : \left| \overline{D} \left(\int g^*, x \right) \right| > \frac{\alpha}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ x : |g^*(x)| > \frac{\alpha}{2} \right\} \right| \\ &\leq \left| \left\{ x : \left| \overline{D} \left(\int f^*, x \right) \right| > \frac{\alpha}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ x : |f^*(x)| > \frac{\alpha}{2} \right\} \right| \\ &= 2 \left| \left\{ x : f^*(x) > \frac{\alpha}{2} \right\} \right| \leq \frac{4}{\alpha} \int_{f \geq N} f(y)dy \end{aligned}$$

Aquest últim terme tendeix a 0 quan $N \to \infty$, d'on deduïm que $\overline{D}(\int g, x) = g(x)$ en quasi tot punt. Anàlogament, es pot demostrar que $\underline{D}(\int g, x) = g(x)$, la qual cosa demostra que g és diferenciable □

En el teorema següent és el que relaciona la diferenciabilitat de les funcions $f \in L^1$ amb propietats de l'operador maximal associat.

Teorema 5.2.2. *Sigui $\mathcal{B}$ una base de densitat i sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f \geq 0$. Aleshores les següents condicions són equivalents:*

a) $\mathcal{B}$ diferencia $\int f$

b) Per cada $\lambda > 0$ i sigui $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successió que tendeix a 0 tal que cada $f_k \leq f$ i $f_k \in L^1$ i sigui $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successió numèrica que tendeix a 0. Aleshores, definint l'operador M_k com l'operador maximal associat a les bases B_{r_k} dels elements amb diàmetre més petit que r_k, tenim:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_k f_k(x) > \lambda\}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

c) Per cada $\lambda > 0$, tenim que per qualsevol successió de conjunts mesurables $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ amb $|A_k| \to 0$ i per qualsevol successió numérica$\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que tendeix a 0:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_k \chi_{A_k} > \lambda\}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Prova. Començarem demostrant que a) implica b). Agafem un cub arbitrari Q i un $\epsilon > 0$. Tenim que f_k convergeix puntualment a 0, així que si apliquem el teorema d'Egorov, que podem veure a l'apèndix, existeix un subconjunt mesurable A de mesura $|A| < \epsilon$ tal que f_k convergeixen uniformement a $Q \setminus A$. Per tant, donat un $\lambda > 0$, existeix un enter h tal que per tot $k \geq h$ i $x \in Q \setminus A$, $f_k(x) < \lambda$. Per altra banda, com $f_k \leq f$ i $\mathcal{B}$ diferencia $\int f$, aplicant el teorema anterior, tenim que $\mathcal{B}$ també diferencia $\int f_k$. Així, per cada $x \in Q \setminus A$ i per tota successió $\{R_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(x)$ que es contrau a x, tenim que:

$$\frac{1}{|R_j(x)|}\int_{R_j(x)} f_h \xrightarrow[j\to\infty]{} f_h < \lambda$$

Per tant, tenim:

$$\lim_{k\to\infty} \{x \in Q : M_k f_h(x) > \lambda\} \subset A$$

A més, com per tot $k \geq h$ tenim $f_k \leq f_h$, aleshores:

$$\{x \in Q : M_k f_k(x) > \lambda\} \subset \{x \in Q : M_k f_h(x) > \lambda\}$$

amb el que tenim:

$$\lim_{k\to\infty} |\{x \in Q : M_k f_k(x) > \lambda\}| \leq |A| \leq \epsilon$$

Com tant Q com ϵ són arbitraris, hem obtingut b).

Per demostrar que b) implica c), només s'ha de prendre $f_k = f\chi_{A_k}$ i ja ho tenim.

Ara demostrarem que c) implica a). Sigui la successió $A_k = \{x : f(x) \geq k\}$ per $k \in \mathbb{N}$, com $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tenim que $|A_k| \to 0$. Així, separem $f(x)$ en $f(x) = f^k(x) + f_k(x)$ amb $f^k = f\chi_{A_k}$ i $f_k = f\chi_{A'_k}$ on A' és el complementari de A. Com $\mathcal{B}$ és base de densitat, aplicant novament el teorema 5.1.8, tenim $D(\int f_k, x) = f_k(x)$. Així, per cada $\lambda > 0$ tenim:

$$\begin{aligned}\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\overline{D}\left(\int f, x\right) - f(x)\right| > 2\lambda\right\}\right| &= \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|\overline{D}\left(\int f^k, x\right) - f^k(x)\right| > 2\lambda\right\}\right| \\ &\leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}\left(\int f, x\right) > \lambda\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : f^k(x) > \lambda\right\}\right| \\ &\leq |\{x \in \mathbb{R}^n : M(f\chi_{A_k})(x) > \lambda\}| + \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : f^k(x) > \lambda\right\}\right|\end{aligned}$$

Fent tendir $k \to \infty$, el primer terme tendeix a 0 per hipòtesi de c) mentre que el segon tendeix a 0 perquè $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Així, $\overline{D}(\int f, x) = f(x)$. Anàlogament, podem obtenir $\underline{D}(\int f, x) = f(x)$. Per tant, $\mathcal{B}$ diferencia $\int f$. □

5.3 Propietats de diferenciació per a classes de funcions

Fins ara hem vist com a partir de desigualtats de tipus dèbil del operador maximal, podem deduir propietats de diferenciació. Ara, veurem com partint de les propietats, arribem a desigualtats de tipus dèbil. També veurem que podem simplicar el teorema 5.2.2 quan tenim bases que són invariants per homotècies o per translacions.

Comencem veient les caracteritzacions de les bases que diferencien $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 5.3.1. *Sigui $\mathcal{B}$ una base de diferenciació a $\mathbb{R}^n$, aleshores són equivalents:*

a) $\mathcal{B}$ diferencia $L^1(\mathbb{R}^n)$

b) Per cada $\lambda > 0$ i per tota successió $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tals que $\|f_k\|_1 \to 0$ i per tota successió de valors reals $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que tendeixen a 0, tenim:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_k f_k(x) > \lambda\}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

c) Per cada $\lambda > 0$, per tota $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tota successió no creixent de conjunts mesurables $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tals que $|A_k| \to 0$ i per tota successió numèrica $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que tendeix cap a 0, tenim:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_k(f\chi_{A_k})(x) > \lambda\}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Prova. Trivial considerant els teoremes anteriors. □

A l'igual que abans, podem obtenir una versió simplificada de la propietat b) si tenim que la base $\mathcal{B}$ és invariant per homotècies. En aquest cas, veurem que $\mathcal{B}$ diferencia $L^1(\mathbb{R}^n)$ si, i només si, l'operador maximal associat a la base és de tipus $(1,1)$-dèbil.

Per demostrar això, abans ho relacionarem amb una altra condició, que és que la base $\mathcal{B}$ sigui invariant per translacions. Si passa això, no es té la doble implicació, però podem obtenir una condició més feble. Per demostrar-ho en cas de translacions, haurem d'utilitzar un lema, la demostració del qual es pot trobar a [13].

Lema 5.3.2. *Sigui $\{A_k\}$ una successió de conjunts mesurables continguts a un interval cúbic fixat $Q \subset \mathbb{R}^n$ tals que $\sum_k |A_k| = \infty$. Aleshores existeix una successió $\{x_k\}$ de punts de $\mathbb{R}^n$ i un conjunt $S \subset Q$ de mesura positiva tals que cada $s \in S$ està dins d'infinits conjunts de la forma $x_k + A_k$.*

Proposició 5.3.3. *Sigui $\mathcal{B}$ una base B-F que és invariant per translacions. Aleshores són equivalents:*

a) $\mathcal{B}$ diferencia $L^1(\mathbb{R}^n)$

b) Existeixen dos constants c i r tals que per cada funció $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i per cada $\lambda > 0$ es té:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_r f(x) > \lambda\}| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|\lambda|} dy$$

on $M_r f(x) = \sup\left\{\dfrac{1}{|R|}\displaystyle\int_R |f(y)|dy : R \in \mathcal{B}(x) \text{ i } \delta(R) < r\right\}$

Prova. Que b) implica a) és conseqüència directa del teorema 5.3.1. Per veure que a) implica b), farem un pas intermedi en el qual a) implica:

b*) Sigui Q un interval cúbic fixat. Aleshores existeixen constants c_Q i r_Q tals que per cada funció $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ amb suport a Q i per cada $\lambda > 0$, tenim:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_{r_Q} f(x) > \lambda\}| \leq c_Q \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\lambda} dy$$

Per demostrar-ho, utilitzarem reducció a l'absurd. Suposem que per un Q fixat i per tot parell de constants c_k, r_k existeix una funció $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ amb suport a Q tal que existeix un $\lambda > 0$ on el conjunt $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : M_{r_k} f_k(x) > \lambda_k\}$ satisfà $|E_k| > c_k \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_k(y)}{\lambda_k} dy$. Podem agafar una successió $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que tendeix a 0 tal que tots els seus elements són més petits que el costat del cub Q i escollir $c_k = 2^k$. Així, si definim $g_k = \dfrac{f_k}{\lambda_k}$ i $\tilde{Q}$ el cub amb mateix centre i amb 3 vegades el seu tamany, tenim $E_k \subset \tilde{Q}$ i:

$$|E_k| = |\{x \in \mathbb{R}^n : M_{r_k} g_k > 1\}| > 2^k \int_{\mathbb{R}^n} g_k(y) dy$$

Per cada k podem escollir un enter positiu h_k tal que $|\tilde{Q}| \leq h_k |E_k| \leq 2|\tilde{Q}|$ amb el que tenim:

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k |E_k| = \infty$$

Ara construirem una successió $\{A_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ de la següent forma: Cada element A_h està format per h_k repeticions de cada un dels elements E_k. Així, si $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{h_1, h_2, ...\}$, tenim que $A_{h_1} = \{E_1^1, ..., E_1^{h_1}\}$, $A_{h_2} = \{E_2^1, ..., E_2^{h_2}\}$, ... obtenint: $\{A_{h_k}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{E_1^1, ..., E_1^{h_1}, E_2^1, ..., E_2^{h_2}, E_3^1 ...\}$, on $E_k^i = E_k$ per tot i tal que $0 \leq i \leq h_k$. Així, doncs, és clar que $\sum_{k=1}^{\infty} h_k |E_k| = \sum_{h=1}^{\infty} |A_h| = \infty$ i que la successió $\{A_{h_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ està continguda a $\tilde{Q}$. Per tant, aplicant el lema 5.3.2, obtenim una successió de punts

$$\{x_1^1, x_1^2, ..., x_1^{h_1}, x_2^1, x_2^2, ..., x_2^{h_2}, x_3^1, ...\}$$

i un conjunt S de mesura positiva continguda a $\tilde{Q}$ tal que tot punt de S està a infinits conjunts E_k^j. Definim ara les funcions $g_k^j = g_k(x - x_k^j)$ per cada k i $j = 1, ..., h_k$ i finalment $f(x)$ definida com:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{j=1}^{h_k} g_k^j(x)$$

on $\alpha_k > 0$ l'escollirem a continuació.

Per una banda, tenim $\|f\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k \|g_k\|_1$ i, com $h_k |E_k| \leq 2|\tilde{Q}|$ i $|E_k| > 2^k \|g_k\|_1$, obtenim:

$$\|f\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k \frac{|E_k|}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k} \cdot 2|\tilde{Q}|$$

Per l'altra, sigui $R \in \mathcal{B}$. Aleshores $\displaystyle \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{j=1}^{h_k} \frac{1}{|R|} \int_R g_k^j(y) dy$

Sigui $s \in S$, hem vist que pertany a infinits conjunts E_k^j. Per definició d'aquests conjunts, existeix una successió $\{R_h\}_{h \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(s)$ que tendeixen a s tals que, degut a la igualtat anterior,

$$\frac{1}{|R_h|} \int_{R_h} f(y) dy > \alpha_{k_m} \text{ per } m = 1, 2, ...$$

Si ara escollim $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\alpha_k \to \infty$ i al mateix temps $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k} < \infty$, tenim que $f \in L^1$ i per cada $s \in S$, $\overline{D}(\int f, s) = \infty$, la qual cosa contradiu a). En conclusió, hem vist que a) implica b*).

Veiem ara que b*) implica b). Per això, cal notar que a causa de la invariància per translacions de $\mathcal{B}$, les constants c_Q i r_Q de b*) no depenen del lloc on Q està a $\mathbb{R}^n$. A més, com $M_{r/2}f \leq M_r f$, podem assumir que $r(Q)$ és menor que la meitat del costat del cub Q.

Asumim ara que $f \geq 0$ i que $f \in L^1$ amb suport contingut a infinits intervals cúbics disjunts $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ on cada un d'aquests cubs té el mateix tamany que Q i que la distància entre dos cubs és almenys igual a la longitud del costat de Q. Aleshores:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_r f(x) > \lambda\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : M_r(f\chi_{Q_j})(x) > \lambda\} := \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$$

on els cubs H_j són disjunts. Per tant, utilitzant la hipòtesi b*) tenim

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_r f(x) > \lambda\}| &= \sum_{j=1}^{\infty} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_r(f\chi_{Q_k})(x) > \lambda\}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} c \int_{Q_j} \frac{f(y)}{\lambda} dy \\ &= c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\lambda} dy \end{aligned}$$

Ara veiem que es compleix per una funció $f \geq 0$ tal que $f \in L^1$ qualsevol. Podem descomposar $f(x) = \sum_{h=1}^{\beta(n)} f_h(x)$ on les f_h són les funcions tractades abans, és a dir, tenen suports disjunts i $\beta(n)$ depen només de la dimensió. Aleshores:

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_r f(x) > \lambda\}| &\leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{h=1}^{\beta(n)} M_r f_h(x) > \lambda \right\} \right| \leq \sum_{h=1}^{\beta(n)} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : M_r f_h(x) > \frac{\lambda}{\beta(n)} \right\} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\beta(n)} c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\beta(n) f_h(y)}{\lambda} dy = \beta(n) \cdot c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\lambda} dy \end{aligned}$$

Podem treure la restricció $f \geq 0$, amb el que hem demostrat el teorema. □

Teorema 5.3.4. *Sigui $\mathcal{B}$ una base B-F que és invariant per homotècies. Aleshores són equivalents les següents condicions:*

a) $\mathcal{B}$ diferencia L^1.

b) L'operador maximal M associat a $\mathcal{B}$ és $(1,1)$-dèbil.

Prova. Només cal veure que la condició *b*) de la proposició anterior implica la condició *b*) d'aquest teorema, ja que la condició inversa és immediata.

Així doncs, suposem que existeixen dos constants c i r tals que per a cada funció $f \in L^1$ i cada $\lambda > 0$ es compleix:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_r f(x) > \lambda\}| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda} dy$$

Sigui $\phi \in L^1$ i $\rho > 0$ un nombre real. Definim una nova funció g tal que per cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenim $g(x) = \phi\left(\frac{\rho}{r}x\right)$. Aleshores és fàcil veure que $g \in L^1$ a partir de:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \phi\left(\frac{\rho}{r}x\right) \right| dx = \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)| dx$$

Aleshores, sigui $y \in \mathbb{R}^n$ i sigui $R \in \mathcal{B}_\rho(y)$, tenim:

$$\frac{1}{|R|}\int_R |\phi(z)|dz = \frac{1}{|\frac{r}{\rho}R|(\frac{\rho}{r})^n}\int_R \left|g\left(\frac{r}{\rho}z\right)\right| dz = \frac{1}{|\frac{r}{\rho}R|(\frac{\rho}{r})^n}\int_{\frac{r}{\rho}R} |g(x)| \left(\frac{\rho}{r}\right)^n dx = \frac{1}{|\frac{r}{\rho}R|}\int_{\frac{r}{\rho}R} |g(x)|dx$$

Això prova que $M_\rho\phi(y) = M_r g(\frac{r}{\rho}y)$, ja que $\frac{r}{\rho}R \in \mathcal{B}_r\left(\frac{r}{\rho}y\right)$ i quan R passa per tots els $\mathcal{B}_\rho(y)$, el conjunt $\frac{r}{\rho}R$ passa per tots els $\mathcal{B}_r(\frac{r}{\rho}y)$. Per tant:

$$\begin{aligned}|\{y \in \mathbb{R}^n : M_\rho\phi(y) > \lambda\}| &= \left|\left\{y \in \mathbb{R}^n : M_r g\left(\frac{r}{\rho}y\right) > \lambda\right\}\right| = \left(\frac{\rho}{r}\right)^n |\{z \in \mathbb{R}^n : M_r g(z) > \lambda\}| \\ &\leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^n c\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(x)|}{\lambda}dx = c\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi(z)|}{\lambda}dz\end{aligned}$$

Per tant, tenim que per cada $\rho > 0$ i per cada $\phi \in L^1$:

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : M_\rho\phi(y) > \lambda\}| \leq c\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi(z)|}{\lambda}dz$$

amb la mateixa constant. Per tant, per cada $\phi \in L^1$ es compleix:

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : M\phi(y) > \lambda\}| \leq c\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi(z)|}{\lambda}dz$$

que és el que volíem demostrar. □

Acabarem el capítol fent una petita extensió d'aquests teoremes a una classe més general d'espais.

Definició 5.3.5. Sigui $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una funció estrictament creixent i que compleixi que $\phi(0) = 0$ i que $\phi(u)$ es d'ordre més gran o igual que u quan $u \to \infty$. Aleshores anomenarem $\phi(L)$ a l'espai de funcions mesurables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tals que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(|f(x)|)dx < \infty$$

Teorema 5.3.6. *Sigui $\mathcal{B}$ una base B-F que diferencia $\phi(L)$. Aleshores, per cada $\lambda > 0$, per cada successió no creixent de nombres reals $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que tendeix a 0 i cada successió no creixent $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \phi(L)$ de funcions no negatives tals que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(f_k(x))dx \to 0$ tenim:*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_{r_k} f(x) > \lambda\}| \to 0$$

Prova. La prova és essencialment la mateixa que 5.3.1 fent els canvis adients a les demostracions. □

Teorema 5.3.7. *Sigui $\mathcal{B}$ una base B-F invariant per homotècies que diferencia $\phi(L)$. Aleshores existeix una constant $c > 0$ tal que per cada $\lambda > 0$ i cada $f \in \phi(L)$ tal que $f \geq 0$, es té:*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M(f_k)(x) > \lambda\}| \leq c\int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right) dx$$

Prova. Ho provarem per reducció al absurd. Suposem que per tota constant $c_k > 0$ existeix una funció $f_k \in \phi(L)$ amb $f_k \geq 0$ i $\lambda_k > 0$ tal que:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_k(x) > \lambda_k\}| > c_k\int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{f(x)}{\lambda_k}\right) dx$$

Per facilitar-nos els càlculs, definim $g_k = \dfrac{f_k}{\lambda_k}$. Podem agafar una successió $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ amb $c_k > 0$ tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k^{-1} < \frac{\phi(1)}{2}$$

A més, existeix una successió $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que tendeix a 0 tal que:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_{r_k} g_k(x) > 1\}| > c_k \int_{\mathbb{R}^n} \phi(g_k(x))dx$$

Sigui ara un compacte $E_k \subset \{x \in \mathbb{R}^n : M_{r_k} g_k(x) > 1\}$ tal que $|E_k| > c_k \int_{\mathbb{R}^n} \phi(g_k(x))dx$. Si considerem el cub unitat obert Q, fixem un k i utilitzem el lema 5.1.7, podem recobrir el cub Q per una successió $\{E_k^h\}_{h\in\mathbb{N}}$ de conjunt homotètics a E_k disjunts continguts a Q i de diàmetre més petit que $1/k$. Així, sigui H_k^h és l'homotècia que porta E_k a E_k^h, definim la funció g_k^h com

$$g_k^h(H_k^h x) = g_k(x)$$

Si ara definim $S_k = \sum_h g_k^h$ i agafem f com el suprem de les k, i.e., $f = \sup_{k\in\mathbb{N}} S_k$, aleshores tenim que $f \in \phi(L)$ i que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(f(x))dx < \frac{1}{2}\phi(1)$$

D'altra banda, si procedim com al teorema 5.1.6, podem veure que $\overline{D}(\int f, x) \geq 1$ per quasi tot $x \in Q$. Com $\mathcal{B}$ diferencia $\phi(L)$ i $f \in \phi(L)$, tenim que $\overline{D}(\int f, x) = D(\int f, x) = f(x) \geq 1$ per quasi tot $x \in Q$ i, per tant,

$$\frac{1}{2}\phi(1) > \int_Q \phi(f) > \phi(1)$$

arribant a contradicció. $\square$

Utilitzant els teoremes que s'han vist en aquest capítol, concloem que la base $\mathcal{B}_B$ de les boles euclidianes i la base $\mathcal{B}_Q$ dels intervals cúbics diferencien els espais L^p amb $1 \leq p \leq \infty$. Per altra banda, la base B_R dels rectangles amb costats paral·lels als eixos, no diferencia L^1 perquè no compleix la desigualtat $(1,1)$-dèbil, però sí diferencia els espais L^p amb $1 < p \leq \infty$. Per últim, també obtenim que la base $\mathcal{B}_P$ dels rectangles arbitràriament girats a $\mathbb{R}^n$ tampoc diferencia l'espai L^1, ja que no compleix la desigualtat $(1,1)$-dèbil.

Apèndix A

Teoremes clàssics

A.1 El teorema d'Egorov

El teorema d'Egorov dóna una condició per la convergència uniforme d'una successió de funcions mesurables amb convergència puntual. Aquest teorema l'hem fet servir al teorema 5.2.2 del capítol 5 d'aquest treball i també l'utilitzarem per demostrar el Teorema de Lusin, que vindrà a continuació.

Teorema A.1.1 (Teorema d'Egorov). *Sigui $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de funcions mesurables definides en un conjunt E mesurable i de mesura finita. Suposem que la successió convergeix puntualment per quasi tot punt $x \in E$ a una funció f finita per quasi tot punt de E. Aleshores, per tot $\epsilon > 0$ existeix un conjunt mesurable $F \subset E$ tal que $|E \setminus F| \leq \epsilon$ i el límit de la successió és uniforme en F.*

Prova. Provarem que el límit inferior de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ compleix l'enunciat. La demostració pel límit superior es anàloga.

Suposarem que el límit superior és finit en quasi tot punt, i.e., existeix un conjunt mesurable $\mathcal{E} \subset E$ tal que per tot $x \in E \setminus \mathcal{E}$, $f(x) \in \mathbb{R}$, i que $|\mathcal{E}| = 0$.

Fixem dos enters positius m i n i definim:

$$E_{m,n} = \bigcap_{j=n}^{\infty} \left\{ x \in (E \setminus \mathcal{E}) : f_j(x) \geq \liminf f_n(x) - \frac{1}{m} \right\}$$

Per $m \in \mathbb{N}$ fixat, els conjunts $E_{m,n}$ són mesurables i creixents, per tant:

$$E \setminus \mathcal{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{m,n}, \text{ i també: } |E| = \lim_{n\to\infty} |E_{m,n}|$$

Per tant, per cada $\epsilon > 0$ fixat, existeix N que depèn de m i n tal que:

$$|E \setminus E_{m,N}| \leq \frac{1}{2^m}\epsilon$$

Definim $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{m,N}$, vegem que és el conjunt que compleix el teorema. És evident que F és mesurable i que, per construcció, es té:

$$|E \setminus F| = \left| E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{m,N} \right| = \left| \bigcup_{m=1}^{\infty} (E \setminus E_{m,N}) \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |E \setminus E_{m,N}| \leq \epsilon$$

Fixem un $\delta > 0$ arbitrari i sigui m_δ l'enter positiu més petit tal que $\delta \geq 1/m_\delta$, aleshores de la inclusió $F \subset E_{m_\delta,N}$ i de la definició dels conjunts $E_{m,n}$ tenim:

$$f_n(x) \geq \liminf f_n(x) - \delta \text{ per tot } n \geq N_\delta = N(m_\delta, \epsilon) \text{ i per tot } x \in F$$

Per tant, en particular, el límit inferior és uniforme dins F.

□

A.2 El teorema de Lusin

El teorema de Lusin és un teorema de la teoria de la mesura que demostra que tota funció mesurable és una funció contínua en quasi tot el seu domini. Aquest teorema l'hem fet servir al teorema 5.1.8 del capítol 5 d'aquest treball i també el farem servir per demostrar la densitat de les funcions contínues amb suport compacte sobre els espais L^p.

Per demostrar el teorema de Lusin, necessitem una proposició, que no demostrarem en aquest treball, però que es pot trobar a [3] i un lema que enunciarem a continuació:

Proposició A.2.1. *Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$. Aleshores A és mesurable si, i només si, per cada $\epsilon > 0$ existeix un subconjunt $B_\epsilon \subset A$ tancat tal que:*

$$|A \setminus B_\epsilon| \leq \epsilon$$

Lema A.2.2. *Sigui ϕ una funció simple definida en un conjunt $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable, aleshores per tot $\epsilon > 0$ existeix un subconjunt F tancat tal que $|E \setminus F| \leq \epsilon$ i que la restricció de ϕ sobre F és contínua.*

Prova. Sigui $\phi : E \to \mathbb{R}$ una funció simple tal que $\phi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ on els E_i són mesurables i disjunts. Aplicant la proposició anterior, tenim que per cada $\epsilon > 0$ existeix un F_i tal que $|E_i \setminus F_i| \leq \dfrac{\epsilon}{n}$.

Definint $F = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$, obtenim que F és tancat i compleix $|E \setminus F| \leq \epsilon$. A més, com ϕ es constant en cada un dels conjunts F_i (ja que són tancats, acotats i disjunts), tenim que la restricció de ϕ a F és contínua. □

Teorema A.2.3 (Teorema de Lusin)**.** *Sigui E un conjunt mesurable fitat a $\mathbb{R}^n$ i f una funció definida sobre E. Aleshores f és mesurable si, i només si, per tot $\epsilon > 0$ existeix un subconjunt tancat $F \subset E$ tal que $|E \setminus F| < \epsilon$ i, a més, f restringit a F és continua.*

Prova. Començarem veient la direcció cap a la dreta. Suposem que $f \geq 0$, ja que si no ho és, podem separar en part positiva i negativa i aplicar la prova a cada un d'ells.

Sigui f mesurable, aleshores es pot aproximar per una successió de funcions simples no decreixents $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que convergeixen puntualment a f en E. Pel lema anterior, per un $\epsilon > 0$ fixat, existeixen $F_n \subset E$ tancats tals que

$$|E \setminus F_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}\epsilon$$

i que les restriccions de f_n a F_n són contínues. Pel teorema d'Egorov, existeix un subconjunt $F_0 \subset E$ tancat tal que

$$|E \setminus F| \leq \frac{1}{2}\epsilon \text{ i que } f_n \text{ convergeix uniformement a } f \text{ en } F_0$$

El conjunt $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ és tancat i

$$|E \setminus F| = |E \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n| = |\bigcup_{n=0}^{\infty}(E \setminus F_n)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |E \setminus F_n| \leq \epsilon$$

Com les funcions f_n són contínues a F i convergeixen uniformement a f en F, aleshores f és també continua en F

Ara veurem la direcció cap a l'esquerra, és a dir, veurem que f és mesurable. Per veure això, només cal veure que $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq c\}$ és mesurable. Si trobem un conjunt $B \subset A$ tancat tal que $|A \setminus B| \leq \epsilon$, podem aplicar la proposició anterior i ho tindrem. Separem A en dos conjunts en funció del conjunt F tancat que tenim a les hipòtesis:

$$A = (A \cap F) \cup (A \cap (E \setminus F)) = B \cup (A \cap (E \setminus F))$$

Com f restringit a F és continua, tenim que B és tancat. A més:

$$|A \setminus B| = |A \cap (E \setminus F)| \leq |E \setminus F| \leq \epsilon$$

Per tant, aplicant la proposició anterior, tenim que A és mesurable i, per tant, f és mesurable. □

A.3 Densitat de C_c a L^p

En aquesta secció, demostrarem que les funcions $f \in L^p$ es poden aproximar per funcions contínues amb suport compacte, resultat que ja hem utilitzat al Teorema de Diferenciació de Lebesgue 3.2.1.

Definició A.3.1. Anomenarem $C_c(X)$ a l'espai de les funcions continues que tenen suport compacte a X.

Teorema A.3.2. *L'espai $C_c(X)$ és dens a l'espai $L^p(X)$ on $1 \leq p < \infty$.*

Prova. Primer veurem que les funcions simples són denses a L^p. Sigui $f \in L^p$ tal que $f \geq 0$, aleshores podem aproximar aquesta funció per una successió no decreixent de funcions simples $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que tendeixen a f tals que $0 \leq \phi_n \leq f$ i, per tant, són de L^p. A més, com es té que $|f - \phi_n|^p \leq f^p$, aplicant el Teorema de la Convergència Dominada tenim que $||f - \phi_n||_p \to 0$ quan $n \to \infty$. Per tant, les funcions simples són denses a L^p.

Ara vegem que podem aproximar qualsevol funció de C_c per funcions simples. Sigui ϕ una funció simple definida a X. Aplicant el Teorema de Lusin que hem vist abans, tenim que per tot $\epsilon > 0$ existeix un subconjunt $F \subset X$ tancat tal que $|X \setminus F| < \epsilon$ i que ϕ restringida a F és continua. Definint una funció $g \in C_c(X)$ com $g(x) = \phi(x)$ quan $x \in F$, tenim que $|g| \leq ||\phi||_\infty$ i, per tant,

$$||g - \phi||_p^p = \int_F |g(x) - \phi(x)|^p dx + \int_{X\setminus F} |g(x) - \phi(x)|^p dx \leq \int_{X\setminus F} 2^p |\phi(x)|^p dx \leq 2^p \epsilon ||\phi||_\infty^p$$

Així, obtenim que $||g - \phi||_p \leq 2\epsilon^{1/p}||\phi||_\infty$. Com les funcions simples són denses a L^p, ja ho tenim. □

Bibliografia

[1] J. Cerdà, *Càlcul Integral*, Edicions Universitat Barcelona, 2001.

[2] J. Cerdà, *Linear Functional Analysis*, American Mathematical Society, 2010.

[3] E. DiBenedetto, *Real Analysis*, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, 2002.

[4] J. Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Ediciones de la Universidad Autonoma de Madrid, 1991.

[5] J. Duoandikoetxea, *The Hardy-Littlewood maximal function and some of its variants*, Advanced Courses of Mathematical Analysis II- Proceedings of the Second International School, 2007.

[6] J. García Cuerva and J.L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Mathematics Studies, 1985.

[7] M. Guzmán *An inequality for the Hardy-Littlewood maximal operator with respect to a product of differentiation bases*, Studia Math. 49(1972), 185-194.

[8] M. Guzmán, *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1975.

[9] M. Guzmán i W. Feller, *Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale*, Fund. Math. 22 (1934), 226 - 256.

[10] C.A. Hayes i C.Y. Pauc, *Full individual and class differentiation theorems in their relations to halo and Vitali properties*, Canad. J. Math. 7(1955), 221-274.

[11] M.A. Krasnosel'skii and Ya.B. Rutickii. *Convex functions and Orlicz spaces* P. Noordfoff Ltd., Groningen, 1961.

[12] A. D. Melas, *The best constant for the centered Hardy-Littlewood maximal inequality.* Annals of Mathematics, 157 (2003), 647-688.

[13] A. Zygmund. *Trigonometric series.* Cambridge University Press, 2002.